Correction DM10

Exercice 1 (extrait ecricome 2006)
1)f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables.
$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = 1 + 2e^x > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(x+1)\big) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$.

Donc la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

De plus, $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)-(x+1) = 2e^x > 0$, ce qui montre que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'asymptote oblique.

3)f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.
Donc 0 admet un unique antécédent α par f, c'est-à-dire qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

De plus, $f(-2) = -1 + 2e^{-2} < 0$, $f(\alpha) = 0$ et $f(-1) = 2e^{-1} > 0$.
Donc $f(-2) \leq f(\alpha) \leq f(-1)$, puis $-2 \leq \alpha \leq -1$ par stricte croissance de f.

4)g est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$ comme somme et produit de fonctions C^1.
Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 données par :

$\partial_1 g(x,y) = e^x(x+y^2+e^x) + e^x(1+e^x) = e^x(x+1+2e^x+y^2)$

$\partial_2 g(x,y) = e^x(2y) = 2ye^x$.

Les points critiques de g sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_1 g(x,y) = 0 \\ \partial_2 g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^x(x+1+2e^x+y^2) = 0 \\ 2ye^x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+1+2e^x+y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+1+2e^x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc le seul point critique de g est $(\alpha, 0)$.
5)g est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$ comme somme et produit de fonctions C^2.
Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 données par :

$\partial_{1,1} g(x,y) = e^x(x+2+4e^x+y^2)$,

$\partial_{1,2} g(x,y) = \partial_{2,1} g(x,y) = 2ye^x$,

$\partial_{2,2} g(x,y) = 2e^x$.

La matrice hessienne de g en $(\alpha, 0)$ est $\begin{pmatrix} e^{\alpha}(\alpha + 2 + 4e^{\alpha}) & 0 \\ 0 & 2e^{\alpha} \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres sont $e^{\alpha}(\alpha + 2 + 4e^{\alpha})$ et $2e^{\alpha}$. Elles sont strictement positives donc g a un minimum local en $(\alpha, 0)$.

6)$\beta = g(\alpha, 0) = e^{\alpha}(\alpha + e^{\alpha})$.

Donc $4\beta + \alpha^2 - 1 = 4e^{\alpha}(\alpha + e^{\alpha}) + \alpha^2 - 1$

$$\begin{aligned} &= 2e^{\alpha}(2\alpha + 2e^{\alpha}) + \alpha^2 - 1 \\ &= (-\alpha - 1)(2\alpha - \alpha - 1) + \alpha^2 - 1 \quad \text{car } f(\alpha) = 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 2 (extrait ecricome 2016)
1)Soit $A > 0$.
On a : $\displaystyle\int_0^A g_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^A = 1 - \frac{1}{1+A}$.
$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+A}\right) = 1$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle I_0 = \int_0^{+\infty} g_0(t)\mathrm{d}t = 1$.
2)Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} t^{3/2}g_n(t)) &= \lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2}\\ &= \lim_{t\to+\infty}(1+t)^{3/2}\frac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2}\end{aligned}$$

car $(1+t)^{3/2}$ est équivalent à $t^{3/2}$ quand $t \to +\infty$.
Donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{3/2}g_n(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln(1+t))^n}{(1+t)^{1/2}} = \lim_{u\to+\infty}\frac{(\ln u)^n}{u^{1/2}} = 0$.
Donc pour $n \geq 1$, on a : $\displaystyle g_n(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ quand $t \to +\infty$.
3)L'intégrale I_n est impropre en $+\infty$.
Or, $\displaystyle g_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$ converge puisque c'est une intégrale de Riemann de paramètre $3/2 > 1$.
Donc d'après le critère de négligeabilité sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$ converge.
Enfin, $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale non impropre.
Donc d'après la propriété de Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$ converge.
Donc pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.
4)Soit $A > 0$.
Effectuons une IPP sur $\displaystyle\int_0^A g_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$.
Posons $u(t) = (\ln(1+t))^{n+1}$ $\qquad$ $\displaystyle v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$.

$$u'(t) = \frac{n+1}{1+t}(\ln(1+t))^n \qquad v(t) = \frac{-1}{1+t}.$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$ donc l'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}\int_0^A g_{n+1}(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{-(\ln(1+t))^{n+1}}{1+t}\right]_0^A - \int_0^A -\frac{n+1}{(1+t)^2}(\ln(1+t))^n\mathrm{d}t\\ &= \frac{-(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1)\int_0^A g_n(t)\mathrm{d}t. \qquad (*)\end{aligned}$$

On a : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{-(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$ comme précédemment.

De plus, $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A g_{n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\mathrm{d}t$
et $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A g_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.
Donc par passage à la limite dans (*), on tire :
$\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$, soit : $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

5)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $I_n = n!$ ».
$\mathscr{P}(0)$ est vraie car on a prouvé en 2)a) que $I_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier quelconque. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (n+1)I_n \\ &= (n+1)n! \textit{ par HR} \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N} : I_n = n!$