

## RAPPORT D'ÉPREUVE

### Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, près des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,10 et un écart-type de 5,34, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

### Commentaires particuliers

#### Exercice 1

##### Partie I

1. (a) Question de cours, bien traitée par une large majorité des candidats. Certains énoncent la formule du cours pour une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , sans prendre la peine de remplacer  $\lambda$  par 1.  
(b) Question bien traitée par une large majorité de candidats. Parmi les erreurs remarquées, certains candidats écrivent  $\int_{-\infty}^x f(x)dx$  (confusion entre bornes et variables), ou alors oublient totalement le cas où  $x < 0$ .
2. (a) Question relativement bien traitée. Certains candidats utilisent à bon escient la convexité de la fonction exponentielle, puis étudient la fonction  $x \mapsto e^x - x - 1$  pour vérifier l'égalité demandée. Les candidats ont parfois eu du mal à utiliser la stricte monotonie pour justifier l'égalité.  
(b) Question bien traitée par une large majorité de candidats.  
(c) Cette première question d'informatique était supposée accessible, et les correcteurs attendaient une écriture exacte de la ligne demandée. Il est dommage que ce type de question soit encore souvent négligé par les candidats, ou bien amène à des réponses incorrectes (peu ont vu que U est un tableau, et qu'il faut donc écrire  $\mathcal{U}(n)$  et non U dans le programme, ...)  
(d) Les questions de ce type (conjecturer à l'aide d'une sortie graphique) sont bien réussies par les candidats, elles permettent de comprendre l'enchaînement des questions et donnent finalement les réponses des questions suivantes.  
(e) Question bien traitée par une large majorité de candidats.

- (f) Le théorème de la limite monotone est parfois énoncé de façon fantaisiste ou approximative. Peu de candidats proposent un raisonnement complet étayé par tous les arguments fondamentaux (passage à la limite et continuité, unicité de la limite, résolution de l'équation du point fixe, ...).
- (g) La manipulation des inégalités est souvent hasardeuse. Les candidats appliquent souvent les fonctions de référence aux membres de l'inégalité sans préciser leur variation sur l'intervalle considéré.
- (h) L'hérédité n'est quasiment jamais réussie par les candidats.
- (i) L'observation de la divergence de la suite des sommes partielles n'est presque jamais explicitée et encore moins argumentée en comparant avec la courbe de la fonction  $\ln$ .
- (j) Beaucoup de candidats appliquent le critère de comparaison sans le citer explicitement, ou sans préciser/vérifier que le terme général de la suite est bien positif. D'autre part, le caractère divergent de la série de terme général  $1/n$  est souvent mal justifié.

## Partie II

1.
  - (a) La plupart des candidats ont la bonne démarche en tête pour l'étude de la continuité en 0. Cependant pour la dérivabilité, pratiquement tous les candidats ont confondu la dérivabilité en 0 avec la dérivabilité à droite en 0, même si le résultat était en désaccord avec leurs résultats ultérieurs (graphique, ...).
  - (b) Des erreurs de calcul au niveau de la dérivée, ce qui conduit a fortiori à des erreurs concernant les variations de  $g$ .
  - (c) Certains candidats confondent convexe et concave.
  - (d) Les représentations graphiques présentes dans les copies manquent très souvent baclées. L'étude en 0 (demandée par l'énoncé) est souvent passée sous silence. Les correcteurs apprécient un tracé simple et soigné, où les éléments importants du graphe sont mis en valeur (axes, tangentes, asymptotes) et les copies répondant à ces critères sont valorisées.
2.
  - (a) Très peu de candidats reconnaissent l'espérance d'une loi exponentielle, et calculent l'intégrale en perdant un peu de temps.
  - (b) Beaucoup de candidats oublient l'argument fondamental de continuité sur  $\mathbb{R}$  de la densité considérée  $g$ .
  - (c) Question bien traitée dans l'ensemble.
  - (d) La notion de convergence absolue est souvent ignorée par les candidats dans leur démarche visant à prouver l'existence d'une espérance pour  $Y$ .
3.
  - (a) Cette question est souvent malmenée par les candidats, et les copies où un manque de rigueur est constant ne parviennent pas à donner de réponse correcte. La plupart des candidats font un calcul formel, faisant apparaître des «  $\ln(x)$  » sans préciser  $x$  est strictement positif ou non. Très peu ont remarqué qu'il se passait quelque chose de différent selon si on était à gauche ou à droite de 1 et que cela avait une influence sur la valeur de  $\ln(x)$ . Rappelons que pour toute variable aléatoire, il peut être utile de regarder son support avant d'étudier sa fonction de répartition.
  - (b) Des erreurs au niveau de calculs de dérivées ont été remarquées chez les quelques candidats qui ont abordé cette question.

## Exercice 2

### Partie I

1. Un nombre non négligeable de candidats confondent variable et paramètre, et considèrent la matrice  $A$  comme variable dans leur preuve de linéarité. Un nombre conséquent de candidats écrivent que « l'application est stable par combinaison linéaire ».

2. Cette question est rarement abordée correctement. Le résultat est souvent parachuté sans véritable raisonnement. La plupart des candidats a considéré que  $A$  était la matrice représentative de  $\varphi_A$ .
3. Cette question n'a quasiment jamais été abordée correctement. Les meilleures copies comprennent qu'il faut faire un raisonnement par double implication mais ne traitent alors que l'implication « facile ».

### Partie II

1. De nombreux candidats confondent les critères d'inversibilité et de diagonalisabilité d'une matrice. Beaucoup de candidats écrivent par exemple que  $A$  est diagonalisable car triangulaire supérieure ne comportant pas de 0 sur la diagonale. Enfin, rappelons que toute matrice triangulaire n'est pas forcément diagonalisable. Certains candidats ont même cru remarquer en  $A$  une matrice symétrique . . . .
2. La question a été bien traitée par une majorité de candidats.
3. Les raisonnements menés ici sont souvent peu compris des candidats. De graves confusions au niveau de la notation Vect ont pu être observées. Peu de candidats ont retranscrit les informations obtenues dans le contexte des matrices carrées pour l'endomorphisme  $\varphi_A$  et ont considéré comme résultat final le fruit de leur travail sur les matrices colonnes.
4. Ici, les correcteurs attendent des candidats qu'ils puissent conclure à l'aide de leurs résultats précédents en appliquant le critère de diagonalisabilité au programme, quelque soient les résultats (corrects ou non) qu'ils aient obtenu au préalable. Le théorème est en général connu, mais sa rédaction est souvent incorrecte (on lit souvent « La somme des sous-espaces propres vaut 4 », . . . )

### Partie III

1. Beaucoup de candidats ont tenté d'aborder la question, mais très peu ont finalement mené le bon raisonnement. Le raisonnement par l'absurde semble peu maîtrisé. Très peu commencent par exemple en écrivant « Supposons que  $A - \lambda I$  soit inversible ».
2. Le calcul de  $\varphi_A(N)$  est souvent mené explicitement, mais très peu de candidats vérifient le caractère non nul de  $N$  pour le décrire en tant que vecteur propre.
3. Pratiquement aucun candidat ne voit le raisonnement par double inclusion dont il est question ici.
4. Quelques rares candidats ont compris le lien entre les sous-espaces propres de  $A$  et  $\varphi_A$  mais ont eu du mal à les formaliser.

### Exercice 3

#### Partie I

1. Comme dans l'exercice 1, la question d'algorithmique est parfois négligée par les candidats. C'est d'autant plus dommage que la question est bien rémunérée dans le barème. Beaucoup de candidats se contentent de recopier l'algorithme sur leur copie, sans même compléter les instructions manquantes.
2. Peu de candidats ont finalement identifié la loi uniforme.
3. Les calculs sont corrects, mais la formule des probabilités composées n'est pas toujours écrite.
4. Les quelques candidats qui ont compris ce qui se passait écrivent le calcul général, et une majorité se trompe sur les derniers facteurs apparaissant dans le produit.
5. Ceux qui ont reconnu la loi uniforme connaissent en général bien la formule de l'espérance.

#### Partie II

1. Cette question est souvent traitée avec succès des candidats, avec des explications plus ou moins claires.
2. Même remarque.

3. Les candidats oublient souvent d'indiquer le système complet d'événements qu'ils utilisent, ou n'écrivent pas correctement la formule des probabilités totales.
4. La plupart des candidats sait quel calcul il doit mener, mais beaucoup luttent encore pour simplifier les notations  $\Sigma$ .

### Partie III

1. On lit souvent  $[2, N]$  comme ensemble de valeurs prises.
2. Le raisonnement est rarement argumenté correctement, notamment l'enchaînement incompatibilité puis indépendance en deux étapes.
3. On note de nombreuses tentatives des candidats, mais le fait que les séries commencent à 2 a considérablement gêné les candidats : soient ils ne s'en rendent pas compte et appliquent la formule du cours directement, soit ils se trompent lorsqu'ils retranchent le terme pour  $k = 1$ ). La convergence de la série est très rarement énoncée, et encore plus rarement justifiée correctement.
4. Quelques bons candidats ont su aborder ces questions avec succès.
5. Quelques bons candidats ont su aborder ces questions avec succès.
6. Peu de candidats ont traité la question. Quand c'est fait, l'idée est correcte mais la rédaction peu précise dans la plupart des cas.
7. Peu de candidats ont traité la question.