ECRICOME Eco 2008

Exercice 1

A tout couple (a,b) de deux réels, on associe la matrice $M(a,b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On note $E = \{M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

On note I la matrice identité $M(1,0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.
3. a)Vérifier que les réels 1 et 2 sont deux valeurs propres de A. Déterminer une base des sous-espaces propres associés à 1 et 2.
   b)En déduire que A est diagonalisable.
4. a)Déterminer deux matrices P et D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :
   — P est inversible et ses trois éléments diagonaux sont égaux à 1.
   — $D = (d_{i,j})$ est diagonale avec $d_{1,1} = 2$
   — $D = P^{-1}AP$
   b)Donner l'expression de la matrice P^{-1}.
5. Pour tous réels a et b, on pose $D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P$.

   Montrer que $D(a,b)$ est diagonale.
6. a)Montrer que $M(a,b)$ inversible $\Longleftrightarrow D(a,b)$ inversible.
   b)En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et sur b pour que $M(a,b)$ soit inversible.
7. a)Prouver que $[M(a,b)]^2 = I \Longleftrightarrow [D(a,b)]^2 = I$

   b)En déduire l'existence de quatre matrices $M(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant $[M(a,b)]^2 = I$.

Exercice 2

On considère la fonction g de deux variables définie par :

$$g(x, y) = 1 + \ln(x + y).$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions f_p et g_p d'une variable :

$$f_p(x) = g(x, p) \quad \text{et} \quad h_p(x) = x - f_p(x).$$

On note (C_p) la courbe représentative de la fonction f_p.

1. **Recherche d'extremum éventuel de la fonction g**

   (a) Représenter, relativement à un repère orthonormé du plan, le domaine de définition D de la fonction g. On hachurera D.
   On admet que cet ensemble de définition est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Déterminer sur D les dérivées partielles premières de g. La fonction g admet-elle un extremum sur D ?

2. **Etude de la fonction f_1**

   (a) Donner le domaine de définition de f_1.

   (b) Déterminer le développement limité en 0, à l'ordre 2, de f_1.

   (c) En déduire une équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse 0, et la position locale de la courbe C_1 par rapport à cette tangente.

   (d) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$.

3. **Etude d'une suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$**

   (a) Montrer que l'équation $f_p(x) = x$ admet une unique solution α_p sur l'intervalle $]0, +\infty[$. (On ne cherchera pas à calculer α_p).

   (b) Déterminer le signe de $h_p(\alpha_{p+1})$ et en déduire que la suite $(\alpha_p)_{p \geq 1}$ est monotone.

   (c) Prouver que l'on a :

   $$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_p \geq 1 + \ln(p)$$

   Quel est le comportement de la suite $(\alpha_p)_{p \geq 1}$ lorsque $p \to +\infty$?

4. **Valeur approchée de α_1**
   On admet que le réel α_1 appartient à l'intervalle $[1, 3]$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$

(a) Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1.$$

(b) Appliquer à f_1 l'inégalité des accroissements finis entre α_1 et u_n.
En déduire l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(c) Déterminer un entier naturel n_0 de telle sorte que si n est supérieur ou égal à n_0, alors $|u_n - \alpha_1|$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

(d) On rappelle qu'en Python, la commande `np.floor(x)` du module `numpy` renvoie la partie entière de x.
Ecrire un programme Python permettant d'obtenir les valeurs de n_0 et de u_{n_0}

Exercice 3

On s'intéresse à l'étude de trois jeux présents dans une fête foraine.

1. **Premier jeu**

   Pour ce premier jeu, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité 1/10, perdue avec la probabilité 9/10.

   Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes. Une personne décide de jouer N parties ($N \geq 2$). On note X_N la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

   (a) Donner la loi de X_N ainsi que la valeur de $E(X_N)$ et $V(X_N)$.

   (b) Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire $E(Y_N)$ et $V(Y_N)$.

   (c) La personne décide de jouer 60 parties. On admet que l'on peut approcher X_{60} par une loi de Poisson.

      i. Donner le paramètre de cette loi de Poisson.

      ii. A l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros ? (utiliser l'annexe à la fin).

2. **Deuxième jeu**

   Pour ce deuxième jeu, le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1.

   Pour $1 \leq i \leq 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre O de la $i^{ème}$ fléchette. Ces trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à 1/5 de ce centre. Enfin, on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3.

   (a) Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i.

   (b) Déterminer l'espérance de X_i.

   (c) Pour tout réel t, exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$.

(d) Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M.

(e) Quelle est la probabilité de $G =$"le joueur gagne la partie" ?

3. **Troisième jeu**

Pour ce dernier jeu, le participant lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N avec $N \geq 2$. On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est $1/N$. Une case peut contenir plusieurs boules.

On étudie la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.

(a) Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.

(b) Donner les lois de T_1 et T_2.

(c) Déterminer, lorsque $n \geq 2$, la probabilité des événements $[T_n = 1], [T_n = 2], [T_n = n]$ (distinguer deux cas $n > N$ et $n \leq N$).

(d) A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité suivante, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$,

$$(I) \qquad P([T_{n+1} = k]) = \frac{k}{N} P([T_n = k]) + \frac{N-k+1}{N} P([T_n = k-1])$$

(e) Soit G_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P([T_n = k])x^k$$

i. Quelle est la valeur de $G_n(1)$?

ii. Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G'_n(1)$.

iii. En utilisant la relation (I), montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G'_n(x) + xG_n(x)$$

iv. En dérivant l'expression précédente, en déduire que :

$$E(T_{n+1}) = (1 - \frac{1}{N})E(T_n) + 1$$

v. Prouver enfin que l'espérance de la variable T_n est donnée par :

$$E(T_n) = N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$$

Table de Poisson des probabilités cumulées : $\sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$

k	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$
0	$0,0498$	$0,0183$	$0,0067$	$0,0025$	$0,0009$
1	$0,1991$	$0,0916$	$0,0404$	$0,0174$	$0,0073$
2	$0,4232$	$0,2381$	$0,1247$	$0,0620$	$0,0296$
3	$0,6472$	$0,4335$	$0,2650$	$0,1512$	$0,0818$
4	$0,8153$	$0,6288$	$0,4405$	$0,2851$	$0,1730$
5	$0,9161$	$0,7851$	$0,6160$	$0,4457$	$0,3007$
6	$0,9665$	$0,8893$	$0,7622$	$0,6063$	$0,4497$
7	$0,9881$	$0,9489$	$0,8666$	$0,7440$	$0,5987$
8	$0,9962$	$0,9786$	$0,9319$	$0,8472$	$0,7291$
9	$0,9989$	$0,9919$	$0,9682$	$0,9161$	$0,8305$
10	$0,9997$	$0,9972$	$0,9863$	$0,9574$	$0,9015$
11	$0,9999$	$0,9991$	$0,9945$	$0,9799$	$0,9467$
12	$1,0000$	$0,9997$	$0,9980$	$0,9912$	$0,9730$
13		$0,9999$	$0,9993$	$0,9964$	$0,9872$
14		$1,0000$	$0,9998$	$0,9986$	$0,9943$
15			$0,9999$	$0,9995$	$0,9976$
16			$1,0000$	$0,9998$	$0,9990$
17				$0,9999$	$0,9996$
18				$1,0000$	$0,9999$
19					$1,0000$