TD14 - couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1 ★ ☆ ☆☆
Dans une boîte contenant 3 boules noires et 5 boules blanches, on tire deux boules successivement sans remise.
On considère les variables aléatoires X et Y définies par :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est blanche} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est blanche} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1)Reconnaître la loi de X.

2)Déterminer la loi du couple (X, Y).

3)En déduire la loi de Y.

4)Soit $Z = XY$. Déterminer $Z(\Omega)$, puis déterminer la loi de Z.

Exercice 2 ★ ☆ ☆☆
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![-1, 1]\!]$ et soit $Y = X^2$.

1)a)Préciser $Y(\Omega)$ et reconnaître la loi de Y.

b)Déterminer la loi du couple (X, Y).

2)Calculer $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.

3)A l'aide du théorème de transfert, calculer $E(XY)$.

4)A l'aide de la formule de Huygens, montrer que $cov(X, Y) = 0$. Peut-on conclure que X et Y sont indépendantes ?

Exercice 3 ★ ☆ ☆☆
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une variance.

1)Rappeler les formules de cours donnant $V(X + Y)$ et $V(X - Y)$.

2)En déduire $cov(X, Y)$ en fonction de $V(X + Y)$ et $V(X - Y)$.

3)Montrer que $cov(X + Y, X - Y) = V(X) - V(Y)$.

Exercice 4 ★ ★ ☆☆
On lance une pièce indéfiniment. A chaque lancer, la probabilité de faire pile est $p \in]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$.
Soient X et Y les variables aléatoires définies par :

X = rang d'obtention du premier pile et Y = rang d'obtention du premier face.

1)Reconnaître la loi de X et la loi de Y. Préciser leur espérance.

2)Dans cette question, on cherche la loi du couple (X, Y).

a)Que valent $P(X = 1 \cap Y = 1)$ et $P(X = i \cap Y = j)$ pour $i \geq 2$ et $j \geq 2$?

b)Montrer que $\forall i \geq 2,\ P(X = i \cap Y = 1) = q^{i-1}p$.

c)Montrer que $\forall j \geq 2,\ P(X = 1 \cap Y = j) = p^{j-1}q$.

3)Justifier que XY admet une espérance et que $E(XY) = \dfrac{1}{pq} - 1$.

4)En déduire que le couple (X, Y) admet une covariance et que $cov(X, Y) = -1$.

5)X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5★ ★ ★☆

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges (avec $n \geq 3$).
On effectue dans cette urne n tirages d'une boule sans remise jusqu'à vider l'urne.
On considère les variables aléatoires :
X = rang d'obtention de la première boule blanche,
Y = rang d'obtention de la seconde boule blanche.

1)Préciser $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

2)Dans cette question, on cherche la loi du couple (X,Y).

a)Que vaut $P(X=i \cap Y=j)$ si $2 \leq j \leq i \leq n$?

b)Montrer que si $1 \leq i < j \leq n$, on a : $P(X=i \cap Y=j) = \dfrac{(n-2)! \times 2}{n!}$,
puis simplifier cette fraction.

3)En déduire que pour tout couple $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a :
$P(X=i) = \dfrac{2(n-i)}{n(n-1)}$ et $P(Y=j) = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)}$.

4)Montrer que $E(X) = \dfrac{n+1}{3}$ et $E(Y) = \dfrac{2n+2}{3}$.

5)Vérifier que $E(XY) = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2ij}{n(n-1)}$, puis que $E(XY) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$.

Indication : utiliser la formule : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

6)Conclure que $cov(X,Y) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{36}$.

Exercice 6★ ★ ☆☆

Calculer en fonction de n les sommes doubles, ci-dessous :

1) $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \ln\left(i^j\right)$ 2) $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$ 3) $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}$

Exercice 7★ ★ ★★

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une boîte au hasard, puis une boule dans cette boîte.
Soient X et Y les variables aléatoires définies par :
X = numéro de la boîte choisie et Y = numéro de la boule tirée.

1)Reconnaître la loi de X.

2)Déterminer la loi du couple (X,Y) (distinguer deux cas : $i < j$ et $i \geq j$).

3)Montrer que $P(X=Y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

4)Déterminer la loi de Y, puis retrouver la loi de X obtenue en 1).

5)Montrer que $E(Y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i}\right)$, puis que $E(Y) = \dfrac{n+3}{4}$.

Exercice 8 (hec 2005)★ ★ ★★

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne blanche contenant n boules blanches numérotées de 1 à n et une urne noire contenant n boules noires numérotées de 1 à n, dans lesquelles on effectue des suites de tirages.
A chaque tirage, on tire simultanément une boule de chaque urne.

On obtient ainsi à chaque tirage, deux boules : une blanche et une noire.
On dira qu'on a obtenu une *paire* lors d'un tirage, si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

1)Dans cette question, on effectue les tirages avec remise des deux boules tirées, jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de 2 boules) effectués.

Déterminer la loi de Y. Donner son espérance et sa variance.

2)Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1.
On considère les variables aléatoires :
U = nombre de tirages effectués,
Z = nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.

a)Reconnaître la loi de U, puis préciser, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $P(U = k)$.

Quelle est la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1 ?

b)Déterminer la loi du couple (U, Z).

c)Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(Z = k) = \displaystyle\sum_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$.

d)Calculer $\mathrm{P}(Z = 1)$. Montrer que $\mathrm{P}(Z = 0) = \dfrac{1}{3}$.

e)En utilisant la formule du triangle de Pascal et le résultat de la question c) pour $k = i + 1$, justifier, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\mathrm{P}(Z = i + 1) = \frac{1}{4}\mathrm{P}(Z = i + 1) + \frac{1}{4}\mathrm{P}(Z = i).$$

f)En déduire la loi de Z.

Indications / Réponses

<u>Exercice 1</u>
1)$X \hookrightarrow \mathscr{B}(5/9)$.
2)$P(X=1\cap Y=1)=P(X=1)P_{(X=1)}(Y=1)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{20}{56}$,
$P(X=1\cap Y=0)=P(X=1)P_{(X=1)}(Y=0)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$,
$P(X=0\cap Y=1)=P(X=0)P_{(X=0)}(Y=1)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$,
$P(X=0\cap Y=0)=P(X=0)P_{(X=0)}(Y=0)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{56}$.
3)La formule des probas totales pour le sce $(X=0),(X=1)$ donne :
$P(Y=1)=P(X=0\cap Y=1)+P(X=1\cap Y=1)=\frac{15}{56}+\frac{20}{56}=\frac{35}{56}$,
$P(Y=0)=P(X=0\cap Y=0)+P(X=1\cap Y=0)=\frac{6}{56}+\frac{15}{56}=\frac{21}{56}$.
4)$Z(\omega)=[\![0,1]\!]$ et $P(Z=1)=P(XY=1)=P(X=1\cap Y=1)=\frac{20}{56}$.
$Z\hookrightarrow\mathscr{B}\left(\frac{20}{56}\right)$.

<u>Exercice 2</u>
On a $\forall k\in[\![-1,1]\!],\ P(X=k)=\frac{1}{3}$.
1)a)$Y(\Omega)=[\![0,1]\!]$ donc Y suit une loi de Bernoulli, son paramètre est :
$P(Y=1)=P(X^2=1)=P\big((X=-1)\cup(X=1)\big)=P(X=-1)+P(X=1)=\frac{2}{3}$.
Donc $Y\hookrightarrow\mathscr{B}(2/3)$.
b)$P(X=-1\cap Y=0)=P(X=-1\cap X^2=0)=0$ car les événements sont incompatibles.
De même, $P(X=0\cap Y=1)=P(X=1\cap Y=0)=0$.
$P(X=-1\cap Y=1)=P(X=-1\cap X^2=1)=P(X=-1)=\frac{1}{3}$.
De même, $P(X=0\cap Y=0)=P(X=1\cap Y=1)=\frac{1}{3}$.
2)$E(X)=\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}xP(X=x)=(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0$.
$E(X^2)=\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}x^2P(X=x)=(-1)^2\times\frac{1}{3}+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.
$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{2}{3}$.
$E(Y)=\frac{2}{3}$ et $V(Y)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.
3)$E(XY)=\displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}xyP(X=x\cap Y=y)=\cdots=0$.
4)La formule de Huygens donne : $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-0\times\frac{2}{3}=0$.
X et Y sont non corrélées. Pour autant, elles ne sont pas indépendantes car par exemple, on a : $P(X=0\cap Y=1)\neq P(X=0)P(Y=1)$.

<u>Exercice 3</u>
1)$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2cov(X,Y)$,
$V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2cov(X,Y)$.
2)En soustrayant, on déduit : $cov(X,Y)=\frac{1}{4}\big(V(X+Y)-V(X-Y)\big)$.
3)$cov(X+Y,X-Y)=cov(X,X)-cov(X,Y)+cov(Y,X)-cov(Y,Y)$ par bilinéarité.
$\qquad = V(X)-V(Y)$ par symétrie

Exercice 4
1)$X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(q)$. Le cours donne : $E(X) = \frac{1}{p}$ et $E(Y) = \frac{1}{q}$.
2)a)Elles sont nulles !
b)$P(X = i \cap Y = 1) = P(F_1 \cap ... \cap F_{i-1} \cap P_i) = P(F_1)\cdots P(F_{i-1})P(P_i)$ par indép.
c)Idem.
3)X et Y admettent une variance (loi usuelle) donc XY admet une espérance donnée par le thm de transfert : $E(XY)$
$$= \sum_{i\geq 1, j\geq 1} ijP(X = i \cap Y = j) = \sum_{j=2}^{+\infty} jP(X = 1 \cap Y = j) + \sum_{i=2}^{+\infty} iP(X = i \cap Y = 1)$$
$$= \sum_{j=2}^{+\infty} jp^{j-1}q + \sum_{i=2}^{+\infty} iq^{i-1}p = \cdots$$
4)X et Y admettent une variance donc le couple (X, Y) admet une covariance donnée par la formule de Huygens : $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \cdots$
5)Non. Comparer par exemple $P(X = 1 \cap Y = 1)$ avec $P(X = 1)P(Y = 1)$.

Exercice 5
1)$X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$.
2)a)Elle est nulle.
b)On différencie les boules : B1,B2,R1,...,Rn-2. Il y a $n!$ tirages possibles car $n!$ $n - uplets$ de boules possibles. Les 2 boules blanches doivent sortir aux tirages i et j, il y a deux choix : B1 en i et B2 en j ou le contraire.
Les 2 boules blanches étant placées, il y a $(n-2)!$ façons de placer les noires.
Après simplification de la fraction, on obtient : $\frac{2}{n(n-1)}$.
3)Appliquer la formule des probas totales en sommant les probabilités du couple.
4)Utiliser que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
5)Théorème de transfert. 6)Formule de Huygens.

Exercice 6
1)$\frac{n(n+1)\ln n!}{2}$ 2)$\frac{n(n+3)}{4}$ 3)$2^{n+1} - n - 2$.

Exercice 7
1)$X \hookrightarrow \mathscr{U}([[1, n]])$.
2)$P(X = i \cap Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \dfrac{1}{ni} & \text{si } i \geq j \end{cases}$

Exercice 8
1)A chaque tirage, la probabilité d'obtenir une paire est $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. D'où $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(1/n)$.
$E(Y) = n$ et $V(Y) = n(n-1)$.
2)a)$U \hookrightarrow \mathscr{G}(1/2)$ donc $U(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(U = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.
En calculant $P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(U = k)\right)$, on voit que la proba de ne pas obtenir B1 est nulle.
b)$P(U = i \cap Z = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \left(\frac{1}{4}\right)^i \binom{i}{j} & \text{si } j \leq i \end{cases}$
Si $j \leq i$, la loi de Z conditionnée par l'événement $(U = i)$ est la loi $\mathscr{B}(i, 1/2)$.
2)d)$P(Z = 1) = 4/9$.
2)f)$P(Z = 0) = 1/3$ et $\forall i \geq 1,\ P(Z = i) = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$.