concours blanc cubes - ecg2 - maths appliquées
lundi 15/01/2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans 1a mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie A

1)Déterminer les valeurs propres de A.

2)A est-elle inversible ?

3)Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.

4)Justifier que A n'est pas diagonalisable.

5)Soient $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (2,1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$.
a)Montrer que $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

b)Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$, puis calculer P^{-1}.

c)Montrer soigneusement que la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d)Rappeler la formule de changement de base reliant A et T.

e)Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un réel u_n tel que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & u_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

f)Donner la valeur de u_0 et vérifiez que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2^n + 2u_n$.

g)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = n2^{n-1}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \mid AM = MA\}$.

6)Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

7)A l'aide de la question 5)d), montrer que

$$\forall M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}),\ AM = MA \Longleftrightarrow TP^{-1}MP = P^{-1}MPT.$$

8)Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

Montrer que $TN = NT$ si et seulement si N est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, où a, b et c sont trois réels.

9)Des questions précédentes, déduire que

$$\mathscr{C}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}.$$

10)Déterminer une base de $\mathscr{C}(A)$ ainsi que la dimension de $\mathscr{C}(A)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \geq 0,\ f(x) = \frac{x+x^2}{2}.$$

Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par la donnée de $U_0 \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$ et par l'égalité

$$\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = f(U_n) = \frac{U_n + U_n^2}{2}.$$

Partie A

1)Dresser le tableau de variations de f. Préciser la limite de f en $+\infty$.

2)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq U_n \leq 1$.

3)a)Montrer que $\forall x \in [0,1]\,,\ f(x) \leq x$.

b)En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

4)Justifier que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et préciser sa limite.

Partie B

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $V_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5)Vérifier par un calcul direct que pour tout $n \in \mathbf{N},\ f(V_n) \leq V_{n+1}$.

6)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq U_n \leq V_n$.

7)Retrouver le résultat de la question 4).

Partie C

Soit $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la somme définie par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+U_k)$.

8)Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

9)En déduire que pour tout entier $n \geq 1$: $0 \leq S_n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} V_k$.

10)a)Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} V_k$ en fonction de n.

b)En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq S_n \leq 2$.

11)Conclure que $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et donner un encadrement de sa limite.

Partie D

12)Montrer que $\forall k \in \mathbf{N},\ \ln(U_{k+1}) - \ln(U_k) = \ln(1+U_k) - \ln 2$.

13)En sommant ces inégalités, en déduire :

$$\forall n \geq 1,\ \ln(U_n) = \ln(U_0) + S_n - n\ln 2.$$

14)Conclure qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{2^n}$.
Donner un encadrement de α.

Partie E

Soit l'équation différentielle sur $\mathbf{R}$:

$$(E) : y'' + 3y' + 2y = f(t).$$

15)Résoudre l'équation différentielle homogène $(E_0) : y'' + 3y' + 2y = 0$.

16)Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme du second degré en t.

17)En déduire toutes les solutions de (E).

18)Vérifier que toutes les trajectoires de (E) divergent.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, a désigne un réel strictement supérieur à 1 et on pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^a)^n} dt.$$

1)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que $(1+t^a)^n \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{an}$.

b)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, en déduire que u_n est une intégrale convergente, puis justifier que $u_n > 0$.

c)Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis convergente.

2)a)A l'aide d'une intégration par parties, établir :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = na\left(u_n - u_{n+1}\right).$$

b)Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{ka}\right).$$

3)Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ S_n = \dfrac{na}{a-1} u_{n+1}$.

b)En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\ln S_n = \ln u_1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{ka}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right].$$

c)Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $\ln(1+x)$.

d)A l'aide de la question 4)c), établir que :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{ka}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{a-1}{ak}.$$

e)Conclure quant à la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.