Exercice HEC III 2005

A.Etude du cas n=2

1)• On a : $A^2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4I$.

Donc $fof = 4Id$ et f verifie (*).

• $v = (x, y) \in Kerf$

$\Longleftrightarrow AV = O$

$\Longleftrightarrow \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$

Donc $Kerf = \{(0,0)\}$.

• f est un endomorphisme injectif donc bijectif donc surjectif de $\mathbf{R}^2$.
Donc $Imf = \mathbf{R}^2$.

2)a)• La matrice de $f - 2Id$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $Im(f - 2Id) = Vect\big((\sqrt{2} - 2; \sqrt{2}), (\sqrt{2}; -\sqrt{2} - 2)\big)$.

Or, les vecteurs $\big(\sqrt{2} - 2; \sqrt{2}\big)$ et $\big(\sqrt{2}; -\sqrt{2} - 2\big)$ sont proportionnels car $\dfrac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2} - 2}$.

Donc $G = Im(f - 2Id) = Vect\left((\sqrt{2} - 2; \sqrt{2})\right) = Vect(u)$.

• Le théorème du rang donne :
$dim(ker(f - 2Id)) + dim(Im(f - 2Id)) = dim(\mathbf{R}^2)$.
Soit $dimF = 2 - dimG$.
Or, $dimG = 1$ car (u) est une famille libre $(u \neq 0)$ et génératrice de G donc une base de G.
On conclut que $dimF = 1$.

• Il reste à trouver un vecteur non-nul de $F = ker(f - 2Id)$, ce qui nous amène à résoudre le système :

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcccc} (\sqrt{2} - 2)x & + & \sqrt{2}y & = & 0 \\ \sqrt{2}x & - & (\sqrt{2} + 2)y & = & 0 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (\sqrt{2} - 2)\dfrac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}}y + \sqrt{2}y = 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}}y \end{array}\right.$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2}{\sqrt{2}}y + \sqrt{2}y = 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}y \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}y.$

On déduit que $(\sqrt{2}+2;\sqrt{2}) \in F$.

$\big((\sqrt{2}+2;\sqrt{2})\big)$ est une famille libre de 1 vecteur de F et $dimF = 1$ donc $\big((\sqrt{2}+2;\sqrt{2})\big)$ est une base de F.

2)b)On a : $AU = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\sqrt{2}-2)+2 \\ \sqrt{2}(\sqrt{2}-2)-2 \end{pmatrix}$.

Soit, $AU = \begin{pmatrix} 4-2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} = -2U$.

$u \neq 0$ et $f(u) = -2u$ donc u est un vecteur propre de f associé à -2.

On a donc $G = Vect(u) \subset ker(f+2Id)$, où $Ker(f+2Id)$ est le s.e.p de f associé à -2.

Enfin, $dim(Ker(f+2Id) \neq 2$ car sinon, on aurait $Ker(f+2Id) = \mathbf{R}^2$ donc $f = -2Id$ et donc $A = -2I$. Ainsi, $dim(ker(f+2Id)) = 1$.

Résumons : on a $G \subset ker(f+2Id)$ et $dimG = dim(ker(f+2Id) = 1$ donc $G = Ker(f+2Id)$.

3)Les questions précédentes montrent que -2 et 2 sont des valeurs propres de f puisque $F = ker(f-2Id)$ et $G = ker(f+2Id)$ sont non-nuls (de dimension 1 en l'occurence).

f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ admettant 2 valeurs propres distinctes. Il est donc diagonalisable, d'après le théorème de réduction.

Une matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres s'obtient en mettant chacun des vecteurs propres associés à 2 et -2 en colonnes :

$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

B.Etude du cas général

1)a)L'égalité $fof = 4Id$ s'écrit : $fo\left(\dfrac{1}{4}f\right) = Id$.

Cela montre que f est bijective (donc un automorphisme de $\mathbf{R}^n$) et que $f^{-1} = \dfrac{1}{4}f$.

1)b)L'égalité $fof - 4Id = 0$ montre que $P(x) = x^2 - 4$ est un polynôme annulateur de f.

Le cours donne : $sp(f) \subset \{racines\ de\ f\}$, soit $sp(f) \subset \{-2;2\}$.

1)c)On a : $2Ido2Id = 4IdoId = 4Id$ et $(-2Id)o(-2Id) = 4Id$.

Donc $2Id$ et $-2Id$ satisfont (*).

2)• On a : $(f+2Id)(f(x)-2x) = (f+2Id)(f-2Id)(x)$

$= (fof - 4Id)(x) = 0$ car f vérifie (*).

Donc $f(x) - 2x \in ker(f+2Id)$.

• De même, $(f-2Id)(f(x)+2x) = (f-2Id)(f+2Id)(x)$

$= (fof - 4Id)(x) = 0$ car f vérifie (*).

Donc $f(x) + 2x \in ker(f-2Id) = F$.

• Soit $y \in G = Im(f - 2Id)$. Alors, $\exists x \in E, y = (f - 2Id)(x)$.
On a alors $y = f(x) - 2x \in ker(f + 2Id)$ d'après ce qui précède.
Donc $G \subset ker(f + 2Id)$.

• Soit $y \in Im(f + 2Id)$. Alors, $\exists x \in E, y = (f + 2Id)(x)$.
On a alors $y = f(x) + 2x \in F$ d'après ce qui précède.
Donc $Im(f + 2Id) \subset F$.

• Comme par énoncé, on a $f \neq -2Id$, c'est-à-dire $f + 2Id \neq 0$, cela signifie que $Im(f + 2Id) \neq \{0\}$.
Comme $Im(f+2Id) \subset F$ et que $Im(f+2Id) \neq \{0\}$, on a $F = ker(f-2Id) \neq \{0\}$, ce qui prouve que 2 est valeur propre de f.

• De même, on a $f \neq 2Id$, c'est-à-dire $f - 2Id \neq 0$. Donc $Im(f - 2Id) \neq \{0\}$.
Comme $G = Im(f - 2Id) \subset ker(f + 2Id)$ et que $Im(f - 2Id) \neq \{0\}$, on a alors $ker(f + 2Id) \neq \{0\}$, ce qui prouve que -2 est valeur propre de f.

3)a)• Comme $x \in ker(f + 2Id)$, on a $(f + 2Id)(x) = 0$, soit $f(x) = -2x$.
Donc $(f - 2Id)(x) = f(x) - 2x = -4x$.

• On déduit que $x = -\frac{1}{4}(f - 2Id)(x)$, ce qui entraîne que $x \in G$.

• On a prouvé que $x \in ker(f + 2Id) \Rightarrow x \in G$, c'est-à-dire que $ker(f + 2Id) \subset G$.
Or, on sait par la question 2) que $G \subset ker(f + 2Id)$.
On a donc $G = Ker(f + 2Id)$.

3)b)On déduit :

$$\begin{aligned} dim(ker(f + 2Id)) &= dimG \\ &= dim(Im(f - 2Id)) \\ &= n - dim(Ker(f - 2Id))(\textit{théoreme du rang}). \end{aligned}$$

D'où $dim(ker(f + 2Id)) + dim(ker(f - 2Id)) = n$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de f vaut n et f est un endomorphisme de E dont la dimension est n. On peut donc conclure par le théorème de réduction que f est diagonalisable.

Problème HEC III 2005

Partie I. Tirages avec remise

1)a)Du fait de la remise, on a $\Omega = \{(x, y), x \in [\![1; n]\!], y \in [\![1; n]\!]\}$.
Et $card(\Omega) = n^2$.
On prendra en outre $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et P la probabilité uniforme.

1)b)• L'expérience aléatoire est constituée d'un certain nombre d'épreuves successives, chacune des épreuves consistant à tirer une boule dans chaque urne. Du fait de la remise, ces épreuves sont indépendantes.
Pour une épreuve donnée, il y a succès si les deux boules tirées portent le même numéro. La probabilité de ce succès est $p = \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ car il y a n^2 paires possibles dont n portent le même numéro [les paires $(1, 1)(2, 2)...(n, n)$].
Enfin, Y compte le rang d'obtention du premier succès.
On peut donc conclure que $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(1/n)$.

• On a $E(Y) = \dfrac{1}{p} = n$ et $V(X) = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n(n-1)$.

2)programme :

```
def remise(n):
    blanc=0
    noir=1
    Y=0
    while blanc!=noir:
        blanc=rd.randint(1,n+1)
        noir=rd.randint(1,n+1)
        Y=Y+1
    return Y
```

3)a)On a $U \hookrightarrow \mathscr{G}(1/2)$ (même raisonnement qu'en 1)b)).
Donc $U(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall i \in \mathbf{N}^* : P(U = i) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1} \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i}$.

3)b)• On a $U(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $Z(\Omega) = \mathbf{N}$ puisqu'on peut n'avoir aucune paire, tout comme un nombre de paires arbitrairement grand.

• Soient $i \in \mathbf{N}^*$ et $j \in \mathbf{N}$.
Si $i < j$, on a $P(U = i \cap Z = j) = 0$ car on ne peut pas tirer plus de paires que de nombre de tirages.
Si $i \geq j$, on a
$$P(U = i \cap Z = j) = P(U = i)P_{(U=i)}(Z = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i} P_{(U=i)}(Z = j).$$
Il reste à calculer la probabilité conditionnelle $P_{(U=i)}(Z = j)$.
Supposons l'événement $(U = i)$ réalisé. Cela signifie qu'on a effectué i tirages, les $i - 1$ premiers tirages ayant amené une blanche numérotée 2 et l'une quelconque des deux noires, alors que le i-ème tirage a amené une blanche numérotée 1 et l'une quelconque des noires.

Quel que soit le tirage, la probabilité d'avoir une paire est $\dfrac{1}{2}$.

Les i tirages sont successifs et indépendants avec une probabilité de succès de $\dfrac{1}{2}$.
On est donc dans le cadre d'une loi binômiale.
Ainsi, $Z_{(U=i)} \hookrightarrow \mathscr{B}(i, 1/2)$.
On a donc $P_{(U=i)}(Z=j) = \binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{i-j} = \binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^i$.
On a donc $P(U=i\cap Z=j) = \left(\frac{1}{2}\right)^i\binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \binom{i}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^i$.
3)c)Soit $j \geq 1$ un entier. La formule des probabilités totales pour le s.c.e $(U=i)_{i\geq 1}$ donne :

$$\begin{aligned}
P(Z=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(U=i\cap Z=j) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} P(U=i\cap Z=j) + \sum_{i=j}^{+\infty} P(U=i\cap Z=j) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} 0 + \sum_{i=j}^{+\infty}\binom{i}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^i \\
&= \sum_{i=j}^{+\infty}\binom{i}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^i.
\end{aligned}$$

3)d)• L'égalité 3)c) pour $j=1$ donne :

$$P(Z=1) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{4}\right)^{i-1} = \frac{1}{4}\frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} = \frac{4}{9}.$$

• L'égalité 3)c) n'étant pas à-priori valide pour $j=0$, il faut repartir au début du calcul.

$$P(Z=0) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(U=i\cap Z=0) = \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{1}{3}.$$

• Pour $j=0$, l'égalité 3)c) s'écrirait : $P(Z=0) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i$, ce qui donnerait $P(Z=0) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \neq \frac{1}{3}$.
Donc l'égalité 3)c) n'est pas valable pour $j=0$.
3)e)L'égalité 3)c) appliquée pour $j=k+1$ donne :

$$P(Z=k+1) = \sum_{i=k+1}^{+\infty}\binom{i}{k+1}\left(\frac{1}{4}\right)^i.$$

En utilisant la formule de Pascal $\binom{i}{k+1} = \binom{i-1}{k+1} + \binom{i-1}{k}$, valable pour $i \geq k+2$, on obtient en isolant le premier terme de la somme :
$P(Z=k+1)$

$$= \binom{k+1}{k+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} + \sum_{i=k+2}^{+\infty}\left[\binom{i-1}{k+1} + \binom{i-1}{k}\right]\left(\frac{1}{4}\right)^i$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} + \sum_{i=k+2}^{+\infty} \binom{i-1}{k+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} + \sum_{i=k+2}^{+\infty} \binom{i-1}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{i}$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} + \sum_{l=k+1}^{+\infty} \binom{l}{k+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{l+1} + \sum_{l=k+1}^{+\infty} \binom{l}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{l+1} \qquad [l=i-1]$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} + \frac{1}{4}\sum_{l=k+1}^{+\infty} \binom{l}{k+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{l} + \frac{1}{4}\sum_{l=k+1}^{+\infty} \binom{l}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{l}$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} + \frac{1}{4}\sum_{l=k+1}^{+\infty} \binom{l}{k+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{l} + \frac{1}{4}\left[\sum_{l=k}^{+\infty} \binom{l}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{l} - \binom{k}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{l=k+1}^{+\infty} \binom{l}{k+1} \left(\frac{1}{4}\right)^{l} + \frac{1}{4}\sum_{l=k}^{+\infty} \binom{l}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{l}$$
$$= \frac{1}{4}P(Z=k+1) + \frac{1}{4}P(Z=k).$$

• Pour $k=0$, l'égalité précédente devient : $P(Z=1) = \frac{1}{3}P(Z=0)$, ce qui n'est pas vrai puisque $P(Z=0) = \frac{1}{3}$ et $P(Z=1) = \frac{4}{9}$.

3)f)De l'égalité de la question 3)e), on tire :

$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(Z=k+1) = \frac{1}{3}P(Z=k)$.

La suite $(P(Z=k))_{k\geq 1}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(Z=k) = P(Z=1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ et $P(Z=0) = \frac{1}{3}$.

Partie II. Tirages sans remise

A.Etude de cas particuliers

1)Si $n=1$, les deux urnes contiennent respectivement une boule blanche numérotée 1 et une boule noire numérotée 1. On ne fait alors qu'un seul tirage pour vider l'urne. Ce tirage amène le couple (1,1) donc une paire. Ainsi, $X_1(\Omega) = \{1\}$ et $P(X_1 = 1) = 1$.
X_1 suit donc une loi certaine.

2)• Au premier tirage, il y a 4 choix de couples de boules possibles : (1,1) (1,2) (2,1) et (2,2).
Au moment d'effectuer le deuxième tirage, il n'y a plus qu'une seule boule dans chaque urne donc qu'un seul choix de couple de boules possible pour le deuxième tirage.
Ces choix étant successifs, on multiplie les dénombrements. Il y a donc $4 \times 1 = 4$ résultats possibles d'expérience.

• Les 4 résultats d'expérience possibles sont :
((1,1)(2,2)) ou ((2,2)(1,1)), auquel cas $X_2 = 2$

((2,1)(1,2)) ou ((1,2)(2,1)), auquel cas $X_2 = 0$.
Donc $X_2(\Omega) = \{0; 2\}$.

• Cherchons la loi de X_2.

$(X_2 = 2)$ est réalisé ssi si le premier tirage amène (1,1) ou (2,2).

Donc $P(X_2 = 2) = P((1,1);(2,2)) = \dfrac{2}{4}$ puisqu'au premier tirage, il y a 4 couples de boules possibles dont 2 réalisent $(X_2 = 2)$.

Ainsi, $P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{2}$ et $P(X_2 = 0) = 1 - P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

B.Etude du cas général

1)a)Du fait de la non-remise et du vidage complet des urnes, on a :
$\Omega = \{(c_1, d_1)...(c_n, d_n), où\ (c_1, ..., c_n) \in \mathscr{S}_n\ et\ (d_1, ..., d_n) \in \mathscr{S}_n\}$
où pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, c_k désigne le numéro de la k-ième blanche tirée et d_k le numéro de la k-ième noire tirée.
Le problème est que l'univers trouvé ne correspond pas tout à fait à l'univers demandé.
En remarquant que l'expérience aléatoire est inchangée si dans un premier temps, on commence par tirer les blanches jusqu'à vider l'urne blanche, et si dans un deuxième temps, on tire les noires jusqu'à vider l'urne noire, on obtient alors comme univers :

$\Omega = \{permutations\ (c_1, ..., c_n)\ de\ E\} \times \{permutations\ (d_1, ..., d_n)\ de\ E\}$
$= \mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n$.

1)b)Comme il y a $n!$ permutations de E, on a donc $card(\Omega) = (n!)^2$.

1)c)Le nombre X_n de paires obtenues est un entier positif ou nul et est nécessairement inférieur ou égal au nombre n de tirages effectués. Donc $0 \leq X_n \leq n$, soit $X_n(\Omega) \subset [\![0; n]\!]$.

2)a)Comme $X_n(\Omega) \subset [\![0; n]\!]$, la famille d'événements $(X_n = j)_{0 \leq j \leq n}$ est un système complet d'événements. D'un point de vue ensembliste, ils forment une partition de Ω. Il en résulte que :
$\displaystyle\sum_{j=0}^{n} card((X_n = j)) = card(\Omega)$ donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a(n,j) = (n!)^2$.

2)b)• On a $(X_n = n) = \{(\sigma, \sigma), \sigma \in \mathscr{S}_n\}$ puisqu'au fil des tirages, la blanche et la noire tirées doivent avoir le même numéro.
Comme il y a $n!$ permutations σ de E, il y a aussi $n!$ couples (σ, σ).
Donc $card(X_n = n) = n!$, c'est-à-dire $a(n, n) = n!$.

• Supposons qu'on obtienne au moins $n - 1$ paires. Alors, il existe
$\sigma = (c_1, ..., c_n) \in \mathscr{S}_n$ et $\sigma' = (d_1, ..., d_n) \in \mathscr{S}_n$ tq $X_n(\sigma, \sigma') \geq n - 1$.
De plus, $\exists i \in [\![1; n]\!], \forall j \in [\![1; n]\!] : j \neq i \Rightarrow c_j = d_j$ (à chaque tirage j, on obtient la même paire, sauf peut-être au i-ème tirage).
Notons $F = \{c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_n\} = \{d_1, ..., d_{i-1}, d_{i+1}, ..., d_n\}$.
En passant au complémentaire dans E, on obtient :
$\overline{F} = \{c_i\} = \{d_i\}$ d'où $c_i = d_i$.
On a donc $\forall j \in [\![1; n]\!] : c_i = d_i$ donc $\sigma = \sigma'$ et donc $X_n(\sigma, \sigma') = n$.
Le raisonnement précédent montre que $(X_n \geq n - 1) \subset (X_n = n)$.
Il en résulte que $(X_n = n - 1) = \emptyset$.
Ainsi, $a(n, n - 1) = 0$.

3)a)• Soit j un entier tel que $0 \leq j \leq n$.
Comptons le nombre d'éventualités $\omega \in \Omega$ qui possèdent exactement j paires.
Pour construire une telle éventualité, on peut successivement :
– commencer par identifier à quels tirages, on obtient ces j paires, il y a $\binom{n}{j}$ choix possibles (car on choisit j tirages parmi n).
– choisir les j numéros qui forment ces paires, il y a $\binom{n}{j}$ choix (car on choisit j numéros parmi n possibles)
– ordonner ces j numéros : il y a $j!$ façons de faire.
– enfin, compléter les j tirages effectués avec $n-j$ restants, ces $n-j$ tirages restants ne possédant nécessairement aucune paire, il y a alors $a(n-j,0)$ façons de faire.

En multipliant tous ces choix, on déduit :

$$a(n,j) = \binom{n}{j}\binom{n}{j} j! a(n-j,0) = \binom{n}{j}\frac{n!}{(n-j)!}a(n-j,0).$$

On conclut que $\dfrac{a(n,j)}{n!} = \dbinom{n}{j}\dfrac{a(n-j,0)}{(n-j)!}$.

• En sommant l'égalité ci-dessus pour j allant de 0 à n, on a :

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{a(n-j,0)}{(n-j)!} = \sum_{j=0}^{n}\frac{a(n,j)}{n!}.$$

Posons $k = n-j$ dans la somme de gauche, on obtient :

$$\sum_{k=n}^{0}\binom{n}{n-k}\frac{a(k,0)}{k!} = \sum_{j=0}^{n}\frac{a(n,j)}{n!}.$$

$$\begin{aligned}\text{Soit, } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a(k,0)}{k!} &= \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n} a(n,j) \ \textit{car} \ \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{n!}\times (n!)^2 \ \textit{avec } 2a) \\ &= n!.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{a(j,0)}{j!} = n!$.

• En isolant le dernier terme de la somme précédente, on obtient :

$$\binom{n}{n}\frac{a(n,0)}{n!} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\frac{a(j,0)}{j!} = n!.$$

D'où $a(n,0) = n!\left[n! - \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\frac{a(j,0)}{j!}\right]$.

3)b)Soient i et k deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$ et $0 \leq i \leq k-1$.

• On a : $\displaystyle\binom{j}{i}\binom{k}{j} = \frac{j!}{(j-i)!i!} \times \frac{k!}{(k-j)!j!}$

$$= \frac{k!}{(j-i)!i!(k-j)!}$$

$$= \frac{k!}{(k-i)!i!} \times \frac{(k-i)!}{(j-i)!(k-j)!}$$

$$= \frac{k!}{(k-i)!i!} \times \frac{(k-i)!}{(j-i)!((k-i)-(j-i))!}$$

$$= \binom{k}{i}\binom{k-i}{j-i}.$$

• De l'égalité précédente, on déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{k}{j} &= \sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{k}{i}\binom{k-i}{j-i} \\
&= \binom{k}{i}\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{k-i}{j-i} \\
&= \binom{k}{i}\sum_{r=0}^{k-i} (-1)^{r+i} \binom{k-i}{r} \ \textit{en posant } r = j-i \\
&= \binom{k}{i}(-1)^i\sum_{r=0}^{k-i} \binom{k-i}{r}(-1)^r 1^{k-i-r} \\
&= \binom{k}{i}(-1)^i(1+(-1))^{k-i} \ \textit{par laformule du binome} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

• En isolant le dernier terme dans la somme ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{k}{j} &= \left[\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{k}{j}\right] - (-1)^k \binom{k}{i}\binom{k}{k} \\
&= (-1)^{k+1}\binom{k}{i}.
\end{aligned}$$

4)a)Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
L'expression de $a(n,0)$ trouvée en 3)a) donne en remplaçant n par k :

$$a(k,0) = k! \left[k! - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \frac{a(j,0)}{j!} \right].$$

Puis, en utilisant l'hypothèse de l'énoncé, on obtient :

$$\begin{aligned}
a(k,0) &= k!\left[k! - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-1)^{j-i}i!\right]\\
&= k!\left[k! - \sum_{0\le i\le j\le k-1}\binom{j}{i}\binom{k}{j}(-1)^{j-i}i!\right]\\
&= k!\left[k! - \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1}\binom{j}{i}\binom{k}{j}(-1)^{j-i}i!\right]\\
&= k!\left[k! - \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{-i}i!\sum_{j=i}^{k-1}\binom{j}{i}\binom{k}{j}(-1)^{j}\right]\\
&= k!\left[k! - \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{-i}i!(-1)^{k+1}\binom{k}{i}\right] \ \textit{avec } 3)b)\\
&= k!\left[k! + \sum_{i=0}^{k-1}i!(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\right]\\
&= k!\left[k!(-1)^{k-k}\binom{k}{k} + \sum_{i=0}^{k-1}i!(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\right]\\
&= k!\sum_{i=0}^{k}i!(-1)^{k-i}\binom{k}{i}.
\end{aligned}$$

4)b)Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : $a(k,0) = k!\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}i!$.

• $\mathscr{P}(1)$ s'écrit : $a(1,0) = 1!\sum_{i=0}^{1}\binom{1}{i}(-1)^{1-i}i!$, soit $a(1,0) = 0$.
C'est vrai puisque $a(1,0) = Card(X_1 = 0) = 0$ d'après II)A)1).

• Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Supposons que $\mathscr{P}(j)$ est vraie pour tout entier $j \in [\![0;k-1]\!]$. On a alors $\mathscr{P}(k)$ vraie, d'après la question précédente.

• On conclut que $\forall k \in \mathbf{N} : a(k,0) = k!\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}i!$.

4)c)• On sait déjà que $X_n(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$ et que X_n ne prend jamais la valeur $n-1$ puisque $a(n,n-1) = 0$ (voir 2)b)). Donc $X_n(\Omega) \subset [\![0;n-2]\!] \cup \{n\}$.
Montrons de plus que toute valeur de $[\![0;n-2]\!] \cup \{n\}$ est prise par X_n.
On peut considérer par exemple les éventualités suivantes :
− $\omega = (\sigma,\sigma')$ avec $\sigma = (1,2,...,n)$ et $\sigma' = (2,3,...,n,1)$.
On a alors $X_n(\omega) = 0$.
− $\omega = (\sigma,\sigma)$ avec $\sigma = (1,2,...,n)$. On a alors $X_n(\omega) = n$.
− pour tout $i \in [\![0;n-2]\!]$, $\omega = (\sigma,\sigma')$ avec $\sigma = (1,2,...,i,i+1,...,n)$ et $\sigma' = (1,2,...,i,i+2,...,n,i+1)$. On a alors $X_n(\omega) = i$.
Ainsi, on a bien $X_n(\Omega) = [\![0;n-2]\!] \cup \{n\}$.

• Déterminons enfin la loi de X_n.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $j \in [\![0;n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_n = j) &= \frac{card(X_n = j)}{card(\Omega)} \\
&= \frac{a(n,j)}{(n!)^2} \\
&= \binom{n}{j}\frac{a(n-j,0)}{n!(n-j)!} \ avec\ 3)a) \\
&= \binom{n}{j}\frac{1}{n!(n-j)!}(n-j)!\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-j}{i}(-1)^{n-j-i}i! \ avec\ 4)a) \\
&= \frac{1}{j!(n-j)!}\sum_{i=0}^{n-j}\frac{(n-j)!}{(n-j-i)!i!}(-1)^{n-j-i}i! \\
&= \frac{(-1)^{n-j}}{j!}\sum_{i=0}^{n-j}\frac{(-1)^i}{(n-j-i)!}.
\end{aligned}$$

Partie III.Tirages mixtes

1)a) Commençons par tirer les boules blanches jusqu'à vider l'urne blanche, on obtient une suite de numéros blancs $(x_1, ..., x_n)$.
Il reste alors n tirages successifs à faire dans l'urne noire.
Ces tirages sont indépendants (du fait de la remise) et au i-ème tirage, la probabilité pour que la boule noire porte le numéro x_i est $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire qu'à chaque tirage de la boule noire, la probabilité de succès (avoir une paire) vaut $\frac{1}{n}$.
De plus, X_n compte le nombre de succès.
Donc $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{1}{n})$.

1)b)$E(X_n) = n \times \frac{1}{n} = 1$ et $V(X_n) = n \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$.

2)a)fonction :

```
def echange(L,i,j):
    L[i],L[j]=L[j],L[i]
```

2)b)Expliquons le fonctionnement du programme.
− on commence par créer une liste, intitulée *blanc* formée de n zéros (ligne 2).
− à l'issue des lignes 3 et 4, on a : blanc=$[1, 2, ..., n]$. Cette liste modélise l'urne blanche.
− on effectue un premier tirage dans l'urne blanche(ligne 5 avec $i = 0$).
− ligne 6, on choisit un premier entier j_1 entre 0 et $n - 1$.
− ligne 7, on échange dans la liste *blanc* les coefficients d'indice 0 et j_1.
On a donc blanc=$[j_1, 2, ..., j_1 - 1, 1, j_1 + 1, ..., n]$.
j_1 représente donc le premier numéro tiré dans l'urne blanche.
Puis, on repart en début de boucle.
− on effectue le deuxième tirage dans l'urne blanche (ligne 5 avec $i = 1$).
− ligne 6, on choisit un deuxième entier j_2 entre 1 et $n - 1$.
− ligne 7, on échange dans la liste *blanc* les coefficients d'indice 1 et j_2.

On a donc blanc=$[j_1, j_2, ...]$.
j_2 représente donc le premier numéro tiré dans l'urne blanche, etc...

Ainsi, le but de ce programme est de simuler n tirages sans remise d'une boule dans l'urne blanche.

3)programme :

```
n=20
blanc=[0]*n
for i in range(n):
    blanc[i]=i+1
for i in range(n-1):
    j=rd.randint(0,n-i)+i
    echange(blanc,i,j)
compteur=0;
noir=[]
for i in range(n):
    noir.append(rd.randint(1,n+1))
    if noir[i]==blanc[i]:
        compteur=compteur+1
print("on a obtenu",compteur,"paires")
```

La liste noir est composée des différentes boules noires tirées.
Le test regarde si le i-ème tirage amène une paire. Si oui, le nombre de paires comptabilisées augmente de 1.