EML Ece 2012

EXERCICE 1

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie I : Étude de la matrice B

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B. Est-ce que B est diagonalisable ?
2. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que $B = PDP^{-1}$
3. Vérifier que $D^2 = 5D - 4I$ et exprimer B^2 comme combinaison linéaire de B et I.
4. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} comme combinaison linéaire de B et I.

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Les questions 3)b)c)d) ont été modifiées !

On considère l'application $\quad h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad M \longmapsto h(M) = AMB.$

1. Vérifier que h est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que h est bijectif et exprimer h^{-1} sous une forme analogue à celle donnée pour h.
3. On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h.

   a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}, M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On note $N = MP$, ou P est la matrice définie dans la question **I2.**
   Montrer : $h(M) = \lambda M \iff AND = \lambda N$, où D est la matrice définie dans la question **I2.**

   b) Déterminer des réels $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ et des matrices **non nulles** N_1, N_2, N_3, N_4 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que
   $$\forall i \in [[1,4]],\ AN_iD = \lambda_i N_i.$$
   Indication : on pourra poser $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ *et résoudre le système à paramètre provenant de l'égalité* $AND = \lambda N$.

   c) Pour tout $i \in [[1,4]]$, on pose : $M_i = N_i P^{-1}$.
   Montrer que $\mathcal{C} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   d) A l'aide des questions précédentes, déterminer la matrice H de h dans la base $\mathcal{C}$, puis vérifier qu'elle est diagonale.

   e) On note e l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et 0 l'endomorphisme nul de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   Montrer : $(h-e) \circ (h+e) \circ (h-4e) \circ (h+4e) = 0$.

EXERCICE 2

Partie I : Étude d'une fonction d'une variable réelle

On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0;+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0;+\infty[$.
3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que f est convexe sur $]0;+\infty[$.
5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$
   a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.
   b) Déterminer les points d'intersection de Γ et, de l'axe des abscisses.
   c) Tracer l'allure de Γ. On admet : $0,36 \leq e^{-1} < 0,37$.

Partie Il : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, de classe C^2, définie, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$ par :

$$F(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0;+\infty[^2$.
2. Montrer que (e,e) est un point critique de F.
3. Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout (x,y) de $]0;+\infty[^2$. Est-ce que F admet, un extremum local en (e,e) ?

EXERCICE 3

Soit$a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx$ est convergente.
2. a) Rappeler une densité d'une variable aléatoire. qui suit la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2.
   En déduire : $I_0 = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
   b) Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$
   En déduire : $I_1 = a^2$.
3. a) Montrer, pour tout entier n. tel que $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0;+\infty[$:

$$\int_0^t x^n e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx = -a^2 t^{n-1} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)\,a^2 \int_0^t x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx$$

b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $I_n = (n-1)\, a^2 I_{n-2}$.

c) Calculer I_2 et I_3.

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. Montrer que g_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

5. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

6. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

7. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$.

8. a) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0;1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(U)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

   b) En déduire un programme Python simulant la variable aléatoire X, le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.
   On rappelle que la fonction *random()* du module *numpy.random* renvoie un réel aléatoire de $[0,1]$.

Soit un entier n tel que $n \geq 2$.
On dit. que les. variables aléatoires à densité $X_1, X_2 \cdots, X_n$ sont indépendantes si, pour tout, n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de réels, les événements $(X_1 \leq x_1)$, $(X_2 \leq x_2)$, $\cdots (X_n \leq x_n)$ sont mutuellement indépendants.
On admet que si n variables aléatoires à densité X_1, $X_2 \cdots, X_n$admettent une espérance, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance qui est égale à la somme des espérances.
On admet que si n variables aléatoires à densité X_1, $X_2 \cdots, X_n$sont indépendantes et admettent variance alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance qui est égale à la. somme des variances.
On considère n variables aléatoires indépendantes X_1, $X_2 \cdots, X_n$ suivant toutes la même loi que la variable aléatoire X.

9. On considère la variable aléatoire $A_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

   a) Montrer que la variable -aléatoire A_n, est un estimateur sans biais de a.

   b) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur A_n.

On définit la variable aléatoire $M_n = \min(X_1, X_2 \cdots, X_n)$.
Ainsi : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, (M_n > t) = (X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap \cdots \cap (X_n > t)$.

10. a) Montrer, pour tout $t\, [0, +\infty[$: $\quad \mathrm{P}(M_n > t) = e^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$.

    b) En déduire la fonction de répartition de M_n.

    c) Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité, admettant g_b comme densité avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$.

    d) Montrez- que la variable aléatoire M_n, admet une espérance $E(M_n)$ et une variance $V(M_n)$ Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.

11. a) En déduire un estimateur B_n, sans biais de a, de la forme $\lambda_n M_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

    b) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur B_n.