Correction concours blanc EDHEC

Exercice 1 (edhec 2004)

1)a)Le premier pile peut sortir au k-ème lancer avec $1 \leq k \leq n$, auquel cas $Z = k$. Z peut aussi prendre la valeur 0 si l'on n'obtient pas de pile. Donc $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

b)Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons $P_k =$« le k-ème lancer fait pile » et $F_k =$« le k-ème lancer fait face ».

Distinguons deux cas :

• $k = 0$

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= P(F_1 \cap ... \cap F_n) \\ &= P(F_1) \times \cdots \times P(F_n) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n . \end{aligned}$$

• $k \geq 1$

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(F_1 \cap ... \cap F_{k-1} \cap P_k) \\ &= P(F_1) \times \cdots \times P(F_{k-1})P(P_k) \quad \text{par indépendance} \\ &= \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k . \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} P(Z = k) &= P(Z = 0) + \sum_{k=1}^{n} P(Z = k) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} \quad \text{en posant } j = k - 1 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1. \end{aligned}$$

d)Programme Python

```
def lancer(n):
    z=0
    k=0
    lancer=0
    while lancer==0 and k<n :
        k=k+1
        lancer=rd.randint(0,2)
        if lancer==1:
            z=k
    return z
```

2)Si $Z = k \in [\![1, n-1]\!]$, alors on tire k boules dans l'urne U_k, qui contient des boules blanches et des boules noires. Les tirages s'effectuant avec remise, le nombre X de boules blanches tirées peut aller de 0 à k.

Si $Z = n$, on tire n boules dans l'urne U_n, qui ne contient que des boules blanches. Donc $X = n$.

Si $Z = 0$, alors $X = 0$.

Finalement $X(\Omega) = \{[\![0, k]\!], 1 \leq k \leq n-1\} \cup \{n\} \cup \{0\} = [\![0, n]\!]$.

3)a)D'après le modèle, on a : $P_{(Z=0)}(X = 0) = 1$ et $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P_{(Z=0)}(X = i) = 0$.

b)Supposons l'événement $(Z = n)$ réalisé. On tire alors n boules avec remise dans l'urne U_n, qui ne contient que des boules blanches. On est alors sûr de ne tirer que des blanches. Donc l'événement $(X = n)$ est certain.
Donc $P_{(Z=n)}(X = n) = 1$.
En revanche, l'événement $(X = i)$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ est impossible.
Donc $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ P_{(Z=n)}(X = i) = 0$.

c)Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Distinguons deux cas :

• $0 \leq i \leq k$
Supposons l'événement $(Z = k)$ réalisé. On tire alors k boules avec remise dans l'urne U_k qui contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.
A chaque tirage, la probabilité de succès (tirer une blanche) est k/n.
Les k tirages sont successifs et indépendants du fait de la remise et X compte le nombre de succès.
La loi de X conditionnée par $(Z = k)$ est donc la loi binomiale $\mathscr{B}\left(k, \dfrac{k}{n}\right)$.

Donc $P_{(Z=k)}(X = i) = \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \left(\dfrac{k}{n}\right)^i \left(\dfrac{n-k}{n}\right)^{k-i}$.

• $k < i \leq n$
Supposons l'événement $(Z = k)$ réalisé. On tire alors k boules avec remise dans l'urne U_k qui contient k boules blanches. L'événement $(X = i)$ est impossible à réaliser car on ne peut obtenir au maximum que k boules blanches.

Donc $P_{(Z=k)}(X = i) = 0$.

4)a)La formule des probabilités totales pour le sce $(Z = k)_{0 \leq k \leq n}$ donne :

$$P(X = 0) = \sum_{k=0}^{n} P\big((X = 0) \cap (Z = k)\big) = \sum_{k=0}^{n} P_{(Z=k)}(X = 0)P(Z = k).$$

Les probabilités $P_{(Z=0)}(X = 0)$ et $P_{(Z=n)}(X = 0)$ doivent être traitées à part.

La question 3)a) donne : $P_{(Z=0)}(X = 0) = 1$.

La question 3)b) donne : $P_{(Z=n)}(X = 0) = 0$.

Les autres probabilités conditionnelles s'obtiennent par la question 3)c).

On obtient en isolant le premier et le dernier terme de la somme :

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= 1\times P(Z=0)+\sum_{k=1}^{n-1} P_{(Z=k)}(X=0)P(Z=k)+0\times P(Z=n)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix} k\\ 0\end{pmatrix}\left(\frac{k}{n}\right)^0\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-0}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k .
\end{aligned}
$$

b)C'est la même méthode que précédemment :

$$P(X=n)=\sum_{k=0}^{n} P_{(Z=k)}(X=n)P(Z=k).$$

La probabilité $P_{(Z=n)}(X=n)$ doit être traitée à part.

La question 3)b) donne : $P_{(Z=n)}(X=n)=1$.

On obtient en isolant le dernier terme de la somme :

$$
\begin{aligned}
P(X=n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{P_{(Z=k)}(X=n)}_{=0 \text{ car } k<n} P(Z=k)+1\times P(Z=n)\\
&= P(Z=n)\\
&= \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}
$$

c)Soit $i\in [\![1,n-1]\!]$. On recommence la même méthode.

$$P(X=i)=\sum_{k=0}^{n} P_{(Z=k)}(X=i)P(Z=k).$$

Il faut de nouveau isoler le premier et dernier terme, mais également scinder la somme en deux, suivant que $k<i$ ou $k\geq i$ en utilisant 3)c).

$$
\begin{aligned}
P(X=i) &= \underbrace{P_{(Z=0)}(X=i)}_{=0} P(Z=0)+\sum_{k=1}^{i-1}\underbrace{P_{(Z=k)}(X=i)}_{=0 \text{ car } k<i} P(Z=k)\\
&\quad +\sum_{k=i}^{n-1} P_{(Z=k)}(X=i)P(Z=k)+\underbrace{P_{(Z=n)}(X=i)}_{=0} P(Z=n)\\
&= \sum_{k=i}^{n-1} P_{(Z=k)}(X=i)P(Z=k)\\
&= \sum_{k=i}^{n-1}\begin{pmatrix} k\\ i\end{pmatrix}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k .
\end{aligned}
$$

5)
$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} P(X=i) &= P(X=0)+P(X=n)+\sum_{i=1}^{n-1} P(X=i)\\
&= \frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+\frac{1}{2^n}+\sum_{i=1}^{n-1} P(X=i) \quad (*)
\end{aligned}
$$

Calculons maintenant $\sum_{i=1}^{n-1} P(X=i)$ en utilisant la question 4)c).

On obtient une somme double :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} P(X=i) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{1\leq i\leq k\leq n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} - \binom{k}{0} \left(\frac{k}{n}\right)^0 \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-0}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\left(\frac{k}{n}+\frac{n-k}{n}\right)^k - \left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right) \quad \text{par la formule du binôme} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right) \quad \text{car le terme est nul pour } k=0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k - \left(\frac{n-0}{2n}\right)^0 \\
&= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k - 1 \\
&= 1-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k .
\end{aligned}$$

En reportant dans $(*)$, on déduit : $\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = 1$.

Exercice 2 (edhec 2003)

1)a)Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $A \geq n$.

$\displaystyle\int_n^A f(x)dx = \int_n^A \frac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}} dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_n^A = -e^{\frac{1}{A}} + e^{\frac{1}{n}}$.

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} e^t = 1$. Par composée, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{\frac{1}{A}} = 1$.

Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_n^A f(x)dx = e^{\frac{1}{n}} - 1$.

Ainsi, I_n est une intégrale convergente et $I_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc $e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire, $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ donc $e^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, ce qui donne $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann de paramètre $2 > 1$). D'après le critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

3)a)•Etudions les variations de f sur $]0, +\infty[$.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit, inverse et composée de fonctions dérivables.

$\forall x > 0,\ f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2} \times \left(-\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right) = -\left(\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right) e^{\frac{1}{x}} < 0$.

Donc f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

• Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et tout réel $x \in [k, k+1]$, on a alors : $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

En intégrant ces inégalités entre k et $k+1$ (bornes croissantes), on a :

$\displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx$.

Or, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)dx = f(k+1) \int_k^{k+1} 1dx = f(k+1) \times [x]_k^{k+1} = f(k+1)$.

Et de la même façon, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(k)dx = f(k)$.

En remplaçant dans les inégalités, on conclut :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

b)Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $m \geq n$ un entier.

En sommant les inégalités précédentes pour k allant de n à m, on obtient :

$$\sum_{k=n}^{m} f(k+1) \leq \sum_{k=n}^{m} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n}^{m} f(k) \quad (*).$$

Il reste à transformer un peu chacune de ces sommes.

$\displaystyle\sum_{k=n}^{m} f(k+1) = \sum_{j=n+1}^{m+1} f(j)$ en posant $j = k+1$.

$\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \int_{k}^{k+1} f(x)dx = \int_{n}^{m+1} f(x)dx$ par Chasles.

$\displaystyle\sum_{k=n}^{m} f(k) = f(n) + \sum_{k=n+1}^{m} f(k)$ en isolant le premier terme.

En remplaçant dans $(*)$, on obtient :

$$\sum_{j=n+1}^{m+1} f(j) \leq \int_{n}^{m+1} f(x)dx \leq f(n) + \sum_{k=n+1}^{m} f(k).$$

La série de terme général $f(n)$ et l'intégrale impropre I_n étant convergentes, on peut passer à la limite quand $m \to +\infty$, ce qui donne :

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} f(j) \leq \int_{n}^{+\infty} f(x)dx \leq f(n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k).$$

Dans la somme de gauche, on renomme j en k, ce qui donne :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

c)Des inégalités ci-dessus, on déduit :

$$I_n - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n.$$

Puis, en divisant membre à membre par I_n :

$$1 - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2 I_n} \leq \frac{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}{I_n} \leq 1.$$

On sait d'après 1)b) que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc $n^2 I_n \underset{+\infty}{\sim} n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 I_n = +\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$, on a par quotient et différence : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2 I_n}\right) = 1$.

D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}{I_n} = 1$.

Cela signifie que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$, c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 3 (edhec 2007)

1)a)Pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda M+N) &= (\lambda M+N)+\ {}^t(\lambda M+N)\\ &= \lambda M+N+\lambda\ {}^tM+\ {}^tN \qquad \text{car la transposée est linéaire}\\ &= \lambda(M+\ {}^tM)+(N+\ {}^tN)\\ &= \lambda\varphi(M)+\varphi(N).\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

De plus, $\forall M\in\mathscr{M}_2(\mathbf{R}),\ \varphi(M)\in\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

On conclut que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

b)$\varphi(E_1)=E_1+\ {}^tE_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=2E_1$

$\varphi(E_2)=E_2+\ {}^tE_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=E_2+E_3$

$\varphi(E_3)=E_3+\ {}^tE_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=E_2+E_3$

$\varphi(E_4)=E_4+\ {}^tE_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}=2E_4.$

Donc $A=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$

c)A est symétrique donc diagonalisable.

2)a)
$$\begin{aligned}Im\varphi &= \text{Vect }(\varphi(E_1),\varphi(E_2),\varphi(E_3),\varphi(E_4))\\ &= \text{Vect }(2E_1,E_2+E_3,E_2+E_3,2E_4)\\ &= \text{Vect }(E_1,E_2+E_3,E_4)\,.\end{aligned}$$

(E_1,E_2+E_3,E_4) est donc une famille génératrice de $Im\varphi$.

De plus, pour tous réels a, b et c, on a :

$aE_1+b(E_2+E_3)+cE_4=0$

$\Longleftrightarrow a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow a=b=c=0.$

Donc la famille (E_1,E_2+E_3,E_4) est libre.

Etant libre et génératrice de $Im\varphi$, c'est donc une base de $Im\varphi$. Et $dimIm\varphi=3$.

b)Le théorème du rang donne :

$$dimKer\varphi+\underbrace{dimIm\varphi}_{=3}=\underbrace{dim\mathscr{M}_2(\mathbf{R})}_{=4}.$$

Donc $dimKer\varphi=1$.

3)a)$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2A.$

Raisonnement par récurrence.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $A^n = 2^{n-1}A$ ».

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $A^1 = 2^0 A$ », c'est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= 2^{n-1}A \times A \quad \text{par HR} \\ &= 2^{n-1}A^2 \\ &= 2^{n-1} \times 2A \quad \text{d'après le calcul fait plus haut} \\ &= 2^n A. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ A^n = 2^{n-1}A$.

b)D'après ce qui précède, on a : $A^2 - 2A = 0$. Posons $P(X) = X^2 - 2X$.
$P(A) = 0$ donc P est un polynôme annulateur de A. Les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de P qui sont 0 et 2.
Ainsi, $sp(A) \subset \{0, 2\}$.

Il reste à confirmer que 0 et 2 sont des valeurs propres de A.

• $E_0(A) = \{U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid AU = 0\}$. On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$AU = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ y + z = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ t = 0 \end{cases}$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x = 0, y = -z, t = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U_1} \right)$.

$E_0(A)$ est non nul donc 0 est valeur propre de A.

(U_1) est une famille génératrice de $E_0(A)$.

Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_0(A)$.

• $E_2(A) = \{U \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) \mid (A - 2I)U = 0\}$.

$$(A - 2I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = z.$$

Donc $E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \\ z \\ t \end{pmatrix}, (x,z,t) \in \mathbf{R}^3 \right\} = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{U_4} \right).$

$E_2(A)$ est non nul donc 2 est valeur propre de A.

(U_2, U_3, U_4) est une famille génératrice de $E_2(A)$.

On vérifie aisément qu'elle est libre. C'est donc une base de $E_2(A)$.

4)A est diagonalisable. Elle peut s'écrire sous la forme réduite :

$$A = QDQ^{-1}$$

– D est diagonale, ses éléments diagonaux sont les valeurs propres de A,

– Q est inversible, ses colonnes sont des bases des sous-espaces propres de A, rangées dans le même ordre que les valeurs propres de D.

On peut prendre par exemple : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors : ${}^tQQ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On n'obtient pas tout à fait I comme demandé. Il faut donc modifier la première et troisième colonne de Q, ce qui est facile à faire en changeant U_1 en aU_1 et U_3 en bU_3, où a et b sont des réels non nuls.

Cherchons donc P sous la forme : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & b & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors : ${}^tPP = \begin{pmatrix} 0 & -a & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & b & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On choisit a et b tels que $2a^2 = 2b^2 = 1$, en prenant par exemple : $a = b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

En conclusion, on prend $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

> Remarque
> Lorsque ${}^tPP = I$, on dit que P est orthogonale. Les vecteurs colonnes de P sont orthogonaux et de norme 1.

Problème (hec BL 2017)

1)Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $X_k(\Omega) = \{-1, 1\}$.

$E(X_k) = (-1) \times P(X_k = -1) + 1 \times P(X_k = 1) = (-1) \times (1-p) + 1 \times p = 2p - 1$.

$E(X_k^2) = (-1)^2 \times P(X_k = -1) + 1^2 \times P(X_k = 1) = (1-p) + p = 1$.

La formule de Koenig donne : $V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = 1 - (2p-1)^2 = 4p - 4p^2$.

2)a)T_n est le produit de variables aléatoires pouvant prendre comme valeurs -1 et 1. Donc $T_n(\Omega) = \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} E(T_n) &= E\left(\prod_{k=0}^{n} X_k\right) \\ &= \prod_{k=0}^{n} E(X_k) \quad \text{par indépendance des } X_k \\ &= \prod_{k=0}^{n} (2p-1) \\ &= (2p-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \begin{aligned}[t] E(T_n) &= (-1) \times P(T_n = -1) + 1 \times P(T_n = 1) \\ &= -(1 - P(T_n = 1)) + P(T_n = 1) \\ &= 2P(T_n = 1) - 1. \end{aligned}$$

On déduit : $2P(T_n = 1) - 1 = (2p-1)^{n+1}$, d'où $P(T_n = 1) = \dfrac{1 + (2p-1)^{n+1}}{2}$.

Et $P(T_n = -1) = 1 - P(T_n = 1) = \dfrac{1 - (2p-1)^{n+1}}{2}$.

b)Soit $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, avec $n > m$.

La formule de Huygens donne :

$cov(T_n, T_m) = E(T_n T_m) - E(T_n)E(T_m) = E\left(X_0^2 \cdots X_m^2 X_{m+1} \cdots X_n\right) - E(T_n)E(T_m)$.

X_0, ..., X_m, X_{m+1}, ...,X_n sont mutuellement indépendantes. Donc X_0^2, ..., X_m^2, X_{m+1}, ...,X_n le sont également par le lemme des coalitions.

On peut alors poursuivre le calcul en multipliant les espérances :

$$\begin{aligned} &cov(T_n, T_m) \\ &= E\left(X_0^2\right) \cdots E\left(X_m^2\right) E\left(X_{m+1}\right) \cdots E\left(X_n\right) - E(T_n)E(T_m) \\ &= 1 \times \cdots \times 1 \times (2p-1) \times \cdots \times (2p-1) - (2p-1)^{n+1}(2p-1)^{m+1} \\ &= (2p-1)^{n-m} - (2p-1)^{m+n+2}. \end{aligned}$$

3)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $p_n = P(T_n = 1)$.

• $T_{n+1} = 1 \iff T_n X_{n+1} = 1 \iff (T_n = 1 \text{ et } X_{n+1} = 1) \text{ ou } (Tn = -1 \text{ et } X_{n+1} = -1)$.

En termes d'événements, cela signifie que l'événement $(T_{n+1} = 1)$ est la réunion des événements incompatibles $\big((T_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)\big)$ et $\big((T_n = -1) \cap (X_{n+1} = -1)\big)$

On déduit :

$P(T_{n+1} = 1) = P\big((T_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)\big) + P\big((T_n = -1) \cap (X_{n+1} = -1)\big)$

Or, $T_n = X_0 \cdots X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions.

On poursuit le calcul :

$$P(T_{n+1}=1) = P(T_n=1)P(X_{n+1}=1) + P(T_n=-1)P(X_{n+1}=-1)$$
$$= p_n \times p + (1-p_n)\times(1-p)$$

On conclut que
$$p_{n+1} = (2p-1)p_n + (1-p) \quad (*)$$

• Retrouvons la loi de T_n.

La suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmético-géométrique.
On introduit le réel x tel que $x = (2p-1)x + (1-p) \quad (**)$
Ce qui donne : $x - (2p-1)x = 1-p$, soit $2(1-p)x = 1-p$, d'où $x = \dfrac{1}{2}$.
Par différence des lignes $(*)$ et $(**)$, on a : $p_{n+1} - x = (2p-1)(p_n - x)$.
Donc la suite $(p_n - x)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $2p-1$.
Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ p_n - x = (p_0 - x)(2p-1)^n$, soit $p_n = x + (p_0-x)(2p-1)^n$.
Or, $x = \dfrac{1}{2}$ et $p_0 = P(T_0=1) = P(X_0=1) = p$.
On conclut que $p_n = \dfrac{1}{2} + \left(p - \dfrac{1}{2}\right)(2p-1)^n = \dfrac{1+(2p-1)^{n+1}}{2}$.
Et on retrouve la valeur de $P(T_n=1)$ trouvée en 2)a).

4)On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$.

a)X_n et X_{n-1} prennent -1 et 1 comme valeurs. Par produit, W_n aussi.
Si $W_n = 1$, alors $Y_n = \dfrac{1}{2}\times 1 + \dfrac{1}{2} = 1$.
Si $W_n = -1$, alors $Y_n = \dfrac{1}{2}\times(-1) + \dfrac{1}{2} = 0$.
Donc $Y_n(\Omega) = \{0,1\}$, ce qui établit que Y_n suit une loi de Bernoulli. Il reste à calculer son paramètre, c'est-à-dire la valeur de $P(Y_n=1)$.
Or, $Y_n = 1 \iff W_n = 1 \iff X_nX_{n-1} = 1 \iff (X_n = 1 \text{ et } X_{n+1} = 1) \text{ ou } (X_n = -1 \text{ et } X_{n+1} = -1)$.
En termes d'événements, cela signifie que l'événement $(Y_n = 1)$ est la réunion des événements incompatibles $\big((X_n=1)\cap(X_{n+1}=1)\big)$ et $\big((X_n=-1)\cap(X_{n+1}=-1)\big)$
On déduit :
$$P(Y_n=1) = P\big((X_n=1)\cap(X_{n+1}=1)\big) + P\big((X_n=-1)\cap(X_{n+1}=-1)\big)$$
$$= P(X_n=1)P(X_{n+1}=1) + P(X_n=-1)P(X_{n+1}=-1) \quad \text{par indépendance}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \quad \text{car } X_n \text{ et } X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$$
$$= \frac{1}{2}.$$
Donc Y_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

b)Soient X et Y deux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli.

• D'après le cours, si X et Y sont indépendantes, alors $cov(X,Y) = 0$.

• Réciproquement, supposons que $cov(X,Y) = 0$.
De la formule de Huygens, on obtient immédiatement : $E(XY) = E(X)E(Y)$.
Comme, X, Y et XY suivent une loi de Bernoulli, leur espérance coincide avec leur paramètre. L'égalité précédente devient alors :

$P(XY=1)=P(X=1)P(Y=1)$, c'est-à-dire :

$$P\big((X=1)\cap(Y=1)\big)=P(X=1)P(Y=1).$$

Les événements $(X=1)$ et $(Y=1)$ sont indépendants. D'après le cours, les événements $(X=1)$ et $(Y=0)$ le sont aussi, ainsi que $(X=0)$ et $(Y=1)$, mais également $(X=0)$ et $(Y=0)$.

En passant aux probabilités, on a alors :

$$\forall(i,j)\in\{0,1\}^2\,,\ P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)=P(X=i)P(Y=j).$$

Donc X et Y sont indépendantes.

c)$P\big((Y_1=1)\cap ...\cap(Y_n=1)\big)$
$=P\big((W_1=1)\cap ...\cap(W_n=1)\big)$
$=P\big((X_1X_0=1)\cap ...\cap(X_nX_{n-1}=1)\big)$
$=P\big((X_0=1)\cap(X_1X_0=1)\cap ...\cap(X_nX_{n-1}=1)\big)$ probabilités totales
$+P\big((X_0=-1)\cap(X_1X_0=1)\cap ...\cap(X_nX_{n-1}=1)\big)$ sce $(X_0=-1),(X_0=1)$
$=P\big((X_0=1)\cap(X_1=1)\cap ...\cap(X_n=1)\big)$
$+P\big((X_0=-1)\cap(X_1=-1)\cap ...\cap(X_n=-1)\big)$
$=P(X_0=1)\times\cdots\times P(X_n=1)+P(X_0=-1)\times\cdots\times P(X_n=-1)$ par indép.
$=\underbrace{\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}}_{n+1\text{ fois}}+\underbrace{\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}}_{n+1\text{ fois}}$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$

Par ailleurs, comme les $Y_k\hookrightarrow\mathscr{B}(1/2)$, on a :

$P(Y_n=1)\times\cdots\times P(Y_n=1)=\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$

On a prouvé que $P\big((Y_1=1)\cap ...\cap(Y_n=1)\big)=P(Y_n=1)\times\cdots\times P(Y_n=1)$.

Les événements $(Y_1=1)$, ..., $(Y_n=1)$ sont donc mutuellement indépendants. Ils restent mutuellement indépendants en remplaçant un quelconque nombre d'entre eux par leur événement contraire.

En conclusion, pour tout $(y_1,...,y_n)\in\{0,1\}^n$, on a :

$$P\big((Y_1=y_1)\cap ...\cap(Y_n=y_n)\big)=P(Y_n=y_1)\times\cdots\times P(Y_n=y_n).$$

Y_1, Y_2, ..., Y_n sont donc mutuellement indépendantes.

d)$Z_n=\sum_{k=1}^{n}W_k=\sum_{k=1}^{n}(2Y_k-1)=2\sum_{k=1}^{n}Y_k-\sum_{k=1}^{n}1=2\sum_{k=1}^{n}Y_k-n.$

Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a :

$P(Z_n=2k-n)=P\left(2\sum_{k=1}^{n}Y_k-n=2k-n\right)=P\left(\sum_{k=1}^{n}Y_k=k\right).$

Y_1, Y_2, ..., Y_n sont mutuellement indépendantes et suivent la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1/2)$ qu'on peut penser comme la loi binomiale $\mathscr{B}(1, 1/2)$.

Par stabilité de la loi binomiale pour l'addition, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

On conclut que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(Z_n = 2k-n) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5)a)• On a vu dans la question 2)a) que $E(T_n) = (2p-1)^{n+1}$.

Donc $|E(T_n)P(K = n)| = |E(T_n)|\,|P(K = n)| \leq |E(T_n)| = |2p-1|^{n+1}$.

$0 < p < 1$ donc $0 \leq |2p-1| < 1$.

La série de terme général $|2p-1|^{n+1}$ est une série géométrique convergente.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série de terme général $|E(T_n)P(K = n)|$ converge. La série de terme général $E(T_n)P(K = n)$ est absolument convergente donc convergente.

• $\forall \omega \in \Omega,\ X_k(\omega) = \pm 1$. Par produit, $T(\omega) = \pm 1$.
Donc $T(\Omega) = \{-1, 1\}$.
T est discrète finie et admet donc une espérance donnée par :

$E(T) = P(T = 1) - P(T = -1)$.

On calcule ces deux probabilités par la formule des probabilités totale spour le sce $(K = n)_{n\in\mathbf{N}}$.

$$\begin{aligned} P(T = 1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((T = 1) \cap (K = n)\big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(\left(\prod_{k=0}^{n} X_k = 1\right) \cap (K = n)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((T_n = 1) \cap (K = n)\big) \end{aligned}$$

K est indépendante des $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$. D'après le lemme des coalitions, K est indépendante de T_n qui est une fonction de X_0, ..., X_n. On obtient alors :

$$P(T = 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T_n = 1)P(K = n) \qquad (*)$$

Par le même raisonnement, on a : $\displaystyle P(T = -1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T_n = -1)P(K = n) \qquad (**)$

Par différence de $(*)$ et $(**)$, on déduit :

$$\begin{aligned} P(T = 1) - P(T = -1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(T_n = 1)P(K = n) - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T_n = -1)P(K = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \big(P(T_n = 1) - P(T_n = -1)\big)P(K = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} E(T_n)P(K = n). \end{aligned}$$

On conclut :
$$E(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}E(T_n)P(K=n).$$
b)• On poursuit en calculant la somme de la série précédente.

$$\begin{aligned}E(T)&=\sum_{n=0}^{+\infty}(2p-1)^{n+1}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\quad \text{car } K\hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)\\&=(2p-1)e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\big((2p-1)\lambda\big)^n}{n!}\\&=(2p-1)e^{-\lambda}e^{(2p-1)\lambda}\quad \text{série exponentielle}\\&=(2p-1)e^{(2p-2)\lambda}.\end{aligned}$$

• $E(T)=P(T=1)-P(T=-1)=P(T=1)-\big(1-P(T=1)\big)=2P(T=1)-1.$

Donc $P(T=1)=\dfrac{1+E(T)}{2}=\dfrac{1+(2p-1)e^{(2p-2)\lambda}}{2}$.

Et $P(T=-1)=1-P(T=1)=\dfrac{1-(2p-1)e^{(2p-2)\lambda}}{2}$.

6)a)Le cours donne :
$$F_H(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

b)Pour tout réel, x, on a :

$$\begin{aligned}F_k(x)&=P(D_k\leq x)\\&=P(HX_k\leq x)\\&=P\big((HX_k\leq x)\cap(X_k=1)\big)+P\big((HX_k\leq x)\cap(X_k=-1)\big)\\&=P\big((H\leq x)\cap(X_k=1)\big)+P\big((-H\leq x)\cap(X_k=-1)\big)\\&=P\big((H\leq x)\cap(X_k=1)\big)+P\big((H\geq -x)\cap(X_k=-1)\big)\\&=P(H\leq x)P(X_k=1)+P(H\geq -x)P(X_k=-1)\big)\\&=P(H\leq x)P(X_k=1)+\big(1-P(H<-x)\big)P(X_k=-1)\big)\\&=pF_H(x)+(1-p)\big(1-F_H(-x)\big).\end{aligned}$$

En composant F_h et $x\mapsto -x$, on déduit :
$$F_H(-x)=\begin{cases}0 & \text{si } x>0\\ 1-e^{\lambda x} & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

Comme F_H est continue sur $\mathbf{R}$ donc en 0, on peut mettre l'inégalité large où on veut, ce qui donne :
$$F_H(-x)=\begin{cases}1-e^{\lambda x} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

On déduit :
$$1-F_H(-x)=\begin{cases}e^{\lambda x} & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Enfin, par différence, en revenant au calcul initial :

$$F_k(x) = p\left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{array}\right. + (1-p)\left\{\begin{array}{cl} e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{array}\right.$$

On conclut :

$$F_k(x) = \left\{\begin{array}{ll} (1-p)e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ \\ 1 - pe^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{array}\right.$$

c)• F_k est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$ comme produit, différence et composée de fonctions continues.

De plus, on a :

$\lim\limits_{x \to 0^-} F_k(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (1-p)e^{\lambda x} = 1 - p = F_k(0)$.

Donc F_k est continue à gauche en 0.

F_k est aussi continue à droite en zéro car elle est continue sur $[0, +\infty[$.

F_k est donc continue en 0. Finalement, F_k est continue sur $\mathbf{R}$.

• F_k est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$ comme produit, différence et composée de fonctions de classe C^1.

F_k est donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0.

• D_k est donc une variable aléatoire à densité. Une densité f_k de D_k s'obtient en dérivant F_k aux points où elle est dérivable et en prenant une valeur arbitraire positive ou nulle ailleurs.

Prenons $f_k(0) = 0$. On a alors :

$$f_k(x) = \left\{\begin{array}{cl} \left((1-p)e^{\lambda x}\right)' = \lambda(1-p)e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \left(1 - pe^{-\lambda x}\right)' = \lambda pe^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{array}\right.$$

Après recollement en 0, on obtient finalement :

$$f_k(x) = \left\{\begin{array}{cl} \lambda(1-p)e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ \lambda pe^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{array}\right.$$

d)i.Comme $H \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, on a d'après le cours : $E(H) = 1/\lambda$.

En revenant à la densité de H et compte tenu que cette densité est nulle sur $]-\infty, 0[$, on a :

$E(H) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \times E(H) = \frac{1}{\lambda^2}$.

d)ii. Pour tout $A < 0$, on a en posant $x = -t$:

$\displaystyle\int_A^0 xe^{\lambda x} dx = \int_{-A}^0 -te^{-\lambda t} \times (-dt) = -\int_0^{-A} te^{-\lambda t} dt$.

$\displaystyle\lim_{A \to -\infty} -\int_0^{-A} te^{-\lambda t} dt = -\int_0^{+\infty} te^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda^2}$ donc $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \int_A^0 xe^{\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda^2}$.

Cela signifie que $\int_{-\infty}^{0} xe^{\lambda x}dx$ converge et que $\int_{-\infty}^{0} xe^{\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda^2}$.

d)iii. D_k admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf_k(x)|\, dx$ converge.

Coupons en 0.

$\int_{-\infty}^{0} |xf_k(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{0} \left|x\lambda(1-p)e^{\lambda x}\right| dx = \int_{-\infty}^{0} -\lambda(1-p)xe^{\lambda x}dx.$

Cette intégrale converge d'après d)ii car elle est de même nature que $\int_{-\infty}^{0} xe^{\lambda x}dx$.

$\int_{0}^{+\infty} |xf_k(x)|\, dx = \int_{0}^{+\infty} \left|x\lambda pe^{-\lambda x}\right| dx = \int_{0}^{+\infty} p\lambda xe^{-\lambda x}dx.$

Cette intégrale converge d'après d)i car elle est de même nature que $\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx$.

Par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf_k(x)|\, dx$ converge.

Donc D_k admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(D_k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_k(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} xf_k(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xf_k(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x\lambda(1-p)e^{\lambda x}dx + \int_{0}^{+\infty} x\lambda pe^{-\lambda x}dx \\
&= \lambda(1-p)\int_{-\infty}^{0} xe^{\lambda x}dx + \lambda p\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx \\
&= \lambda(1-p) \times \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) + \lambda p \times \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda}\big(-(1-p)+p\big) \\
&= \frac{2p-1}{\lambda}.
\end{aligned}$$