Corrrection DM4 cubes

Exercice 1

Partie I :

1)Pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, pour tout réel λ, on a :

$$\begin{aligned}\phi_A(\lambda M+N) &= A(\lambda M+N)-(\lambda M+N)A\\ &= \lambda AM+AN-\lambda MA-NA\\ &= \lambda(AM-MA)+(AN-NA)\\ &= \lambda\phi_A(M)+\phi_A(N).\end{aligned}$$

$A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ donc par produit, $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), AM\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $MA\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Par différence, $AM-MA\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Donc $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \phi_A(M)\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
ϕ_A est donc « endo ».

On conclut que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

2)$\phi_A(I_n)=AI_n-I_nA=A-A=0_n$. Donc $I_n\in Ker\phi_A$.
Ainsi, $Ker\phi_A$ est non nul et ϕ_A n'est pas injective.
ϕ_a est un endomorphisme non injectif donc non surjectif.

3)A étant diagonalisable, il existe $P\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ inversible et $D\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ diagonale telles que $A=PDP^{-1}$.

En passant à la transposée, on a :
${}^tA={}^t\left(PDP^{-1}\right)={}^t\left(P^{-1}\right)^tD\;{}^tP=\left({}^tP\right)^{-1}D\left({}^tP\right)$.

Posons $Q={}^tP$. Comme P est inversible, Q l'est également (car deux matrices transposées ont même rang) et on a :

$${}^tA=Q^{-1}DQ.$$

${}^tA$ est donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont celles de D donc celles de A.
Ainsi, A et t^A ont les mêmes valeurs propres.

4)Comme X est un vecteur propre de A, il existe un réel λ tel que $AX=\lambda X$.
Comme Y est un vecteur propre de ${}^tA$, il existe un réel μ tel que ${}^tAY=\mu Y$.

On a alors : $$\begin{aligned}\phi_A\left(X^tY\right) &= A\left(X^tY\right)-\left(X^tY\right)A\\ &= (AX)^tY-X^t({}^tAY)\\ &= (\lambda X)^tY-X^t(\mu Y) \text{ par hypothèse}\\ &= \lambda X^tY-\mu X^tY.\end{aligned}$$

Donc $\phi_A\left(X^tY\right)=(\lambda-\mu)X^tY \quad (*)$

X est un vecteur non nul car c'est un vecteur propre. Donc l'une de ses composantes x_i est non nulle.
De même, l'une des composantes y_j de Y est non nulle.
On a alors : $[X^tY]_{ij}=x_iy_j\neq 0$. Donc la matrice X^tY est non nulle.

L'égalité $(*)$ assure alors que X^tY est un vecteur propre de ϕ_A (associé à la valeur propre $\lambda-\mu$).

5)a)Soient i et j des entiers de $[\![1,n]\!]$.
V_i est un vecteur de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont une base est $(X_1,...,X_n)$.
Donc V_i peut s'écrire comme combinaison linéaire de X_1,...,X_n.
De même, V_j peut s'écrire comme combinaison linéaire de Y_1,...,Y_n.

On pose donc $V_i = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ et $V_j = \sum_{l=1}^{n} b_l Y_l$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} V_i{}^t V_j &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) {}^t\left(\sum_{l=1}^{n} b_l Y_l\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} b_l {}^t Y_l\right) \text{ par linéarité de la transposée} \\ &= \sum_{1\leq k,l\leq n} a_k b_l X_k{}^t Y_l \quad \text{en développant.} \end{aligned}$$

On a établi que $V_i{}^t V_j$ est combinaison linéaire des $X_k{}^t Y_l$. Donc $V_i{}^t V_j \in \text{Vect }(\mathscr{F})$.

5)b)Comme Vect $(\mathscr{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, il est stable par combinaison linéaire.
Donc toutes les combinaisons linéaires des $V_i{}^t V_j$ sont dans Vect $(\mathscr{F})$.
Autrement dit, Vect $\left(V_i{}^t V_j, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right) \subset$ Vect $(\mathscr{F})$ $\quad (*)$

Or, $V_i{}^t V_j = E_{ij}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé sur la i-ième ligne et j-ième colonne qui vaut 1.
Ainsi, la famille $\left(V_i{}^t V_j, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, ce qui entraîne que Vect $\left(V_i{}^t V_j, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right) = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

En reportant dans $(*)$, on obtient : $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \subset$ Vect $(\mathscr{F})$.

Or, Vect $(\mathscr{F}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Par double inclusion : Vect $(\mathscr{F}) = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

$\mathscr{F}$ est donc une famille génératrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Elle est constituée de n^2 vecteurs, cardinal qui coïncide avec la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
C'est donc une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

6)A est diagonalisable donc il existe une base $(X_1,...,X_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
De même, comme ${}^tA$ est diagonalisable, il existe une base $(Y_1,...,Y_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de ${}^tA$.

Formons la famille $\mathscr{F} = \left(X_i{}^t Y_j, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right)$.

D'après la question 4), la matrice $X_i{}^t Y_j$ est un vecteur propre de ϕ_A.

D'après la question 5)b), $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

On vient de construire une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les vecteurs sont des vecteurs propres de ϕ_A, ce qui entraîne que ϕ_A est diagonalisable.

Exercice 2 : (inspiré d'edhec maths approfondies)

1)Soit $x \geq 0$ un réel.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$ comme composée et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

En revanche, $I(x)$ est impropre en 0 car $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}$ n'est pas définie en 0.

$\lim\limits_{t\to 0} e^{-tx} = 1$ donc $\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}dt$ est une intégrale de Riemann convergente car $1/2 < 1$.

D'après le critère d'équivalence sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt$ converge.

Donc pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $I(x)$ est convergente.

2)$I(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{A\to 0^+} \int_A^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{A\to 0^+} \left[2\sqrt{t}\right]_A^1 = \lim_{A\to 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{A}) = 2.$

3)Soient a et b deux réels de $\mathbf{R}_+$ tels que $a \leq b$.

Pour tout $t \in [0,1]$, on a : $-ta \geq -tb$, puis $e^{-ta} \geq e^{-tb}$ et $\dfrac{e^{-ta}}{\sqrt{t}} \geq \dfrac{e^{-tb}}{\sqrt{t}}$.

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et 1, on a :

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-ta}}{\sqrt{t}}dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-tb}}{\sqrt{t}}dt$, c'est-à-dire : $I(a) \geq I(b)$.

Donc $x \mapsto I(x)$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

4)a)Notons $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et ϕ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit $A > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A e^{-t^2}dt &= \int_0^{A\sqrt{2}} e^{-u^2/2}\frac{1}{\sqrt{2}}du \quad \text{en posant } u = \sqrt{2}t \\
&= \int_0^{A\sqrt{2}} \sqrt{\pi}e^{-u^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}du \\
&= \sqrt{\pi}\int_0^{A\sqrt{2}} \varphi(u)du \\
&= \sqrt{\pi}\left(\phi(A\sqrt{2}) - \phi(0)\right) \\
&= \sqrt{\pi}\left(\phi(A\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} A\sqrt{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = 1$ car ϕ est une fonction de répartition.

Par composée, $\lim\limits_{A\to+\infty} \phi(A\sqrt{2}) = 1$.

Donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-t^2}dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4)b)Soit $A \in]0,1]$.

Dans l'intégrale $\int_A^1 \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt$, posons $u = \sqrt{tx}$ ou encore $t = \dfrac{u^2}{x} = \varphi(u)$.

bornes :

$t = A \iff u = \sqrt{Ax}$ et $t = 1 \iff u = \sqrt{x}$,

fonction :

$\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} = \dfrac{e^{-u^2}}{u/\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}e^{-u^2}}{u}$,

élément différentiel :

$dt = \varphi'(u)du = \dfrac{2u}{x}du$.

φ est de classe C^1. La formule de changement de variable est licite et donne :

$\int_A^1 \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt = \int_{\sqrt{Ax}}^{\sqrt{x}} \dfrac{\sqrt{x}e^{-u^2}}{u}\dfrac{2u}{x}du = \dfrac{2}{\sqrt{x}}\int_{\sqrt{Ax}}^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du$.

En passant à la limite quand $A \to 0^+$, on obtient :

$\int_0^1 \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt = \dfrac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du \quad (*)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc $\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}du \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

L'égalité $(*)$ donne alors $\int_0^1 \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\sqrt{x}}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ainsi, $I(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = 0$.