EML 2022

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on pose : $q = 1-p$.
Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\big([X=k]\big) \; = \; q^k\, p \; = \; (1-p)^k\, p$$

PARTIE A

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = X+1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

2. En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

3. Informatique. On suppose importé le module `numpy.random` d'alias `rd`.
On rappelle que la fonction `rd.random()` renvoie un réel aléatoire entre 0 et 1.
Compléter la fonction Python suivante, prenant en entrée le réel p et renvoyant une simulation de la variable aléatoire X.

```
def simule_X(p):
    Y=...
    while ........... :
        Y=Y+1
    X=Y-1
    return X
```

PARTIE B

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;
- si k est égal à 0, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur ;
- si k est un entier supérieur ou égal à 1, alors la machine définit k variables aléatoires X_1, ..., X_k, toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A, et reverse au joueur $(X_1 + \cdots + X_k)$ jetons ;
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à p pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.
Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, **place l'intégralité de ses jetons** dans la machine, et continue de jouer encore et encore.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.
On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi : $Z_0 = 1$.
On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X.

---

4. Compléter la fonction Python suivante, prenant en entrée un entier $n \in \mathbb{N}$, un réel p, simulant l'expérience aléatoire et renvoyant la valeur de Z_n.
Cette fonction devra utiliser la fonction `simule_X`.

```
def simule_Z(n,p):
    Z=1
    for i in range(n):
        s=0
        for j in range(Z):
            ...............
        Z=.......
    return Z
```

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit la probabilité u_n que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine ; ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big)$.
On note également R l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton ».

5. ***a)*** Préciser les valeurs de u_0 et de u_1.

b) Comparer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements $[Z_n = 0]$ et $[Z_{n+1} = 0]$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.

Dans la suite de l'exercice, on note : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. Justifier : $\mathbb{P}(R) = \ell$.

7. ***a)*** Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_2 = 0]\big) = (u_1)^k$.
On **admet** que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}\big([Z_{n+1} = 0]\big) = (u_n)^k$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z_1 = k]\big)\,(u_n)^k = \dfrac{p}{1 - q\,u_n}$.

8. ***a)*** Montrer que ℓ vérifie : $(\ell - 1)(q\,\ell - p) = 0$.

b) On suppose : $p \geqslant \dfrac{1}{2}$. Démontrer : $\mathbb{P}(R) = 1$.

c) On suppose : $p < \dfrac{1}{2}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0, \dfrac{p}{q}\right]$. En déduire : $\mathbb{P}(R) < 1$.

d) Expliquer pourquoi le casino préfèrera choisir p dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

PARTIE C

On suppose à présent que $p \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Le casino cherche la valeur à donner à p pour que le joueur joue le plus longtemps possible dans le casino et ainsi, dépense plus d'argent dans ses concommations au bar.

On note T la variable aléatoire égale au nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque, pour la première fois, celui-ci n'a plus de jeton.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 1 - u_n$.

9. Justifier : $\forall n \in N,\ u_n = \mathbb{P}([T \leqslant n])$ puis $\forall n \in N^*,\ \mathbb{P}([T = n]) = v_{n-1} - v_n$.

10. Montrer, pour tout $N \in N^*$: $\sum\limits_{n=1}^{N} n\mathbb{P}([T = n]) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N$.

11. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$

a) Montrer : $\forall n \in N,\ u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

b) En déduire que la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

12. On suppose maintenant $p > \dfrac{1}{2}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \dfrac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{q}{p} w_n$.

b) En déduire : $\forall n \in N,\ u_n = \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$, puis : $\forall n \in N,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$.

c) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et que $E(T) \leqslant \dfrac{1}{1 - \frac{q}{p}}$.

13. Quelle(s) valeurs(s) de p recommanderiez-vous au casino ?

EXERCICE 2

On rappelle que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et que la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle **trace de** M le réel noté $\mathrm{tr}(M)$ défini par :

$$\mathrm{tr}(M) = a + d$$

Soit J une matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = M + \mathrm{tr}(M)\, J$$

On note enfin Id l'application identique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a donc $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), Id(M) = M$.

1. ***a)*** Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(M) \end{array} \right.$ est linéaire.

b) Déterminer une base du noyau de l'application tr et vérifier : $\dim\big(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})\big) = 3$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer la matrice, notée A, de f dans la base $\mathscr{B}$.

b) Vérifier : $(A - I_4)^2 = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$ où I_4 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

c) En déduire les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

d) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

4. QUESTION MODIFIEE !

On revient au cas général où J désigne une matrice **non nulle quelconque** de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On pose $\mu = 1 + tr(J)$.

a) Justifier que $\mathrm{Ker}(f - Id) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. En déduire le rang de $A - I_4$.
Conclure que 1 est valeur propre de A et que $\dim E_1(A) = 3$.

b) Calculer $f(J)$. En déduire que μ est valeur propre de A.

c) Montrer que $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ (f - Id)^2(M) = \mathrm{tr}(M)\,\mathrm{tr}(J)J$.

d) En déduire que $(f - Id)^2 \circ (f - \mu Id)$ est l'endomorphisme nul.

e) Donner un polynôme annulateur de A, puis conclure que $sp(A) = \{1, \mu\}$.

f) A l'aide des questions précédentes, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(J)$ pour que A soit diagonalisable.

g) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(J)$ pour que A soit inversible.

EXERCICE 3

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1)Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

2)a)Montrer que $\forall t \in]-\infty, 1[,\ \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0$.

b)Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis déterminer f' sur ces intervalles.

c)En déduire la monotonie de f sur $]-\infty, 1[$.

3)a)Donner le développement limité à l'ordre 2 en de $t \mapsto \ln(1-t)$.

b)Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

c)Montrer enfin que f est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$.

4)Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 1.

5)Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant apparaître la tangente en 0.

PARTIE B

On considère maintenant la fonction L définie sur $]-\infty, 1[$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 1[,\ L(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

On rappelle que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge et on admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6)Justifier que L est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$ et préciser L' sur $]-\infty, 1[$.

7)**Etude de L en 1**

a)Montrer à l'aide d'un changement de variable :

$$\forall (A, B) \in]0, 1[^2,\ \int_A^B f(t)dt = \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t}dt.$$

b)Montrer :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in]0, 1[,\ \frac{-\ln(t)}{1-t} = \left(\sum_{k=0}^{n} -t^k \ln t\right) - \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t}.$$

c)Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k \ln t \; dt$ converge et

$$\int_0^1 -t^k \ln t \; dt = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

d)Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{-t \ln t}{1-t}$ est bornée sur $]0,1[$.

(On pourra commencer par calculer les limites en 0 et en 1).

En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln t}{1-t} dt$ converge, puis montrer :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln t}{1-t} dt = 0.$$

e)A l'aide de la question **7)b)**, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t} dt$ converge, puis que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

f)En déduire que L est prolongeable par continuité en 1 en posant $L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

8)a)Justifier que la fonction $x \mapsto L(x) + L(-x) - \dfrac{1}{2} L\left(x^2\right)$ est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ et calculer sa dérivée sur ces intervalles.

b)En déduire que $\forall x \in [-1,1],\ L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2} L\left(x^2\right)$.

c)Préciser alors la valeur de $L(-1)$.

PARTIE C

On considère enfin la fonction Φ définie sur l'ouvert $]-\infty,0[^2$ par :

$$\forall (x,y) \in]-\infty,0[^2,\ \Phi(x,y) = L(x) + L(y) - L(-xy).$$

On admet que Φ est de classe C^2 sur $]-\infty,0[^2$.

9)a)Calculer pour tout $(x,y) \in]-\infty,0[^2$, les dérivées partielles d'ordre 1 de Φ au point (x,y).

b)En déduire que Φ admet $(-1,-1)$ comme unique point critique.

10)a)Montrer que la matrice hessienne, notée H, de Φ au point $(-1,-1)$ est :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)Déterminer les valeurs propres de H.

11)La fonction Φ présente t-elle un extrémum local sur $]-\infty,0[^2$?