DM6
à rendre le lundi / /

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1)a)Montrer que f est continue à droite en 0.

b)Montrer que f est dérivable à droite en 0 et préciser $f'_d(0)$.

2)a)Justifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.

b)Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c)A l'aide d'un changement de variable, déterminer la limite de f en 0^-.

d)Dresser le tableau de variations de f.

3)a)Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de e^u.

b)En déduire que $\forall x \neq 0,\ f(x) \underset{+\infty}{=} x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

On admettra que cette égalité est encore valable en $-\infty$.

c)Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique D dont on précisera l'équation.
Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et D au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

d)Tracer $\mathscr{C}_f$ et D.