DM14 cubes - à rendre le lundi / /

Exercice 1 :

Dans tout l'exercice, $n \in \mathbf{N}^*$, k est un entier naturel **impair** et $E = \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
On considère une matrice $S \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ admettant n valeurs propres disctinctes deux à deux λ_1, ..., λ_n.
L'objectif de l'exercice est de montrer que si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ commute avec S^k, alors elle commute avec S.

1)Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que $P^{-1}SP$ soit une matrice diagonale D.

2)On considère l'application f de E dans $\mathbf{R}^n$ qui à tout polynôme T de E fait correspondre le vecteur $f(T)$ de $\mathbf{R}^n$ défini par :

$$f(T) = \left(T({\lambda_1}^k), T({\lambda_2}^k), ..., T(\lambda_n^k)\right).$$

a)Montrer que f est un isomorphisme.

b)En déduire l'existence d'un unique polynôme U de E tel que :

$U({\lambda_1}^k) = \lambda_1$, $U({\lambda_2}^k) = \lambda_2$, ..., $U({\lambda_n}^k) = \lambda_n$.

3)Soit R le polynôme défini par : $R(X) = U(X^k) - X$. Montrer que R est un polynôme annulateur de D, puis de S.

indication : on pourra poser $U(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ et calculer $U(D^k)$.

4)Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, une matrice qui commute avec S^k.

a)Montrer que $\forall p \in \mathbf{N},\ AS^{pk} = S^{pk}A$.

b)En déduire que A et S commutent.

5)On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a)Vérifier que S possède deux valeurs propres distinctes.

b)Montrer que A commute avec toute puissance paire de S, mais ne commute pas avec S.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbf{R} : f(x) = \dfrac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$.

1)Etudier la parité de f.

2)Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on considère X une variable aléatoire de densité f.

3)a)Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.

3)b)Montrer que X possède une variance (ne pas la calculer).

4)On note F la fonction de répartition de X.
Montrer que F est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0,1[$.

5)On considère la variable aléatoire $Y = F(X)$.

a)Déterminer la loi de Y.

b)Déterminer explicitement $F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

c)Etablir que $\forall x \in\ ]0,1[\ ,\ F^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.