DS2 ecg2 maths appliquées - 13/11/2024

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.
On dit qu'une matrice $A \in M_n(R)$ est nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que

$$A^{k-1} \neq 0_n \text{ et } A^k = 0_n$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n.
Soit $A \in M_n(R)$. On dit que le couple (Δ, N) est une *décomposition de Dunford* de A si

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

1. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.
Dans toute la suite de l'exercice, on pose :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Déterminer les valeurs propres de A.
   b) A est-elle diagonalisable ?
3. On considère les matrices colonnes
$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   a) Calculer les produits ΔX_1, ΔX_2 et ΔX_3.
   b) Justifier que Δ est diagonalisable et déterminer P inversible telle que $\Delta = PDP^{-1}$.
   c) Calculer P^{-1}.
4. a) Etablir que N est une matrice nilpotente.
   b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.
   c) En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner pour tout entier $p \geq 1$, l'expression de A^p en fonction des puissances de Δ, de N et de p.
   d) Etablir que pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\quad \Delta^k N = N\Delta^k = N$.
   e) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\quad \Delta^k = PD^kP^{-1}$.
   f) Proposer pour tout entier $p \geq 1$, une décomposition de Dunford de A^p.

Exercice 2

Les questions 5)6)7)8) ont été modifiées par rapport au sujet de concours initial.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

On considère l'application f qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = AM$$

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que la famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et I_4 la matrice unité d'ordre 4.

1) Vérifier que A n'est pas inversible.
2) Déterminer les valeurs propres de la matrice A, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
3) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4) a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et vérifier que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2.
   b) En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
   c) Calculer les matrices $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$, $f(E_4)$, puis écrire chacune comme combinaison linéaire de E_1,E_2,E_3, E_4. Donner alors une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5) a) Ecrire la matrice B.
   b) Déterminer soigneusement le rang de B et de $B - 7I_4$.
   c) En déduire les valeurs propres de B. Justifier que B est diagonalisable.

   Dans la suite de l'exercice, on généralise. A est une matrice **quelconque** de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que A et B possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

6) Montrer que λ est valeur propre de $B \iff \exists M \neq 0 \mid f(M) = \lambda M$.

   On pourra utiliser l'application identique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qu'on notera Id.
7) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On pose $V = X\ {}^tX$.
   a) Justifier que V appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Montrer que $f(V) = \lambda V$.
   c) A l'aide de la question 6), conclure que λ est valeur propre de B .
8) Soit λ une valeur propre de B. D'après la question 6), il existe alors une matrice non nulle $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $f(M) = \lambda M$.

   En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer que λ est valeur propre de A.

Exercice 3

Partie A

Dans cette partie, on étudie les fonctions sh et ch, appelées respectivement *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperbolique* définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1)Etudier la parité des fonctions sh et ch.

2)a)Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x)$.

b)Justifier que sh est dérivable sur $\mathbf{R}$, calculer sa dérivée et l'exprimer à l'aide de la fonction ch.

c)Dresser le tableau de variations de sh.

d)Etudier le signe de $sh(x)$ suivant les valeurs de x.

e)Etudier la convexité de la fonction sh.

3)a)Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} ch(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} ch(x)$.

b)Justifier que ch est dérivable sur $\mathbf{R}$, calculer sa dérivée et l'exprimer à l'aide de la fonction sh.

c)Dresser le tableau de variations de ch, puis vérifier : $\forall x \in \mathbf{R}^*,\ ch(x) > 1$.

d)Etudier la convexité de la fonction ch.

4)a)Montrer que $\forall x \in \mathbf{R},\ ch(x) > sh(x)$.

b)Montrer que $\forall x \in \mathbf{R},\ \big(ch(x)\big)^2 = 1 + \big(sh(x)\big)^2$.

c)Montrer que $\forall x \geq 0,\ sh(x) \geq x$.

d)Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions sh et ch ainsi que leur tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Dans cette partie, on étudie la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{xsh(x)}{ch(x) - 1} \text{ et } f(0) = 2.$$

5)a)Ecrire le développement limité en 0 à l'ordre 1 de la fonction sh.

b)Ecrire le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction ch.

6)a)A l'aide de la question 5), montrer que f est continue à droite en 0.

b)Conclure que f est continue sur $[0, +\infty[$.

7)a)Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis montrer à l'aide de la question A4)b) que

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{sh(x) - x}{chx - 1}.$$

b)Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c)Dresser le tableau de variations de f.

d)On admet que les fonctions sh et ch admettent un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$sh(x) \underset{0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $ch(x) \underset{0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Montrer alors que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. Que peut-on en conclure ?

8)a)Montrer que $f(x) - x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{e^x}$.

b)En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - x\big)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

9)Pour tout $x \geq 0$, on pose :

$$g(x) = xsh(x) + 2 - 2ch(x).$$

a)Justifier que g est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \geq 0,\ g''(x) = xsh(x)$.

b)En déduire le sens de variation de g', puis le signe de g'.

c)Conclure que $\forall x \geq 0,\ g(x) \geq 0$.

d)Montrer que $\forall x > 0,\ f''(x) = \dfrac{g(x)}{\big(ch(x) - 1\big)^2}$. Conclure que f est convexe.

10)Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ et tous les éléments qui vous paraissent utiles.