Révisions - séance 4

Exercice

Partie I

Dans cette partie, N désigne une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle[1] que $N \neq 0$ et $N^2 = 0$.
On considère le système différentiel écrit sous forme matricielle :

$$Y' = NY \qquad (\mathbf{S_1})$$

Les solutions de (S_1) sont donc les matrices colonnes $Y(t) \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ vérifiant $\forall t \in \mathbf{R},\ Y'(t) = NY(t)$.
On admettra que pour toute matrice $M(t) \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et toute matrice colonne $Y(t) \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, on a :

$$\big(M(t)Y(t)\big)' = M'(t)Y(t) + M(t)Y'(t) \qquad (*)$$

1)a) Montrer que 0 est la seule valeur propre de N.

b)Montrer par l'absurde que N n'est pas diagonalisable.

2)a)Pour tout $t \in \mathbf{R}$, calculer le produit $(I - tN)(I + tN)$.

b)En déduire que pour tout $t \in \mathbf{R}$, la matrice $I - tN$ est inversible et expliciter son inverse à l'aide de I, N et t.

3)Pour toute matrice colonne $Y(t) \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, on pose $Z(t) = (I - tN)Y(t)$.

a)Etablir que $\forall t \in \mathbf{R},\ Y'(t) = NY(t) \iff Z'(t) = 0$.
Indication : on pourra montrer les deux implications en utilisant $(*)$ et 2)b).

b)Conclure que les solutions de (S_1) sont de la forme :

$$Y(t) = (I + tN)\,Y_0$$

où Y_0 est une matrice constante quelconque de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.

Partie II

Dans toute la suite de l'exercice, on considère $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

On considère aussi le système différentiel écrit sous forme matricielle :

$$X' = AX \qquad (\mathbf{S_2})$$

Les solutions de (S_2) sont donc les matrices colonnes $X(t) \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ vérifiant $\forall t \in \mathbf{R},\ X'(t) = AX(t)$.

4)a)Calculer $(A + 2I)^2$. En déduire les valeurs propres de A.

b)A est-elle diagonalisable ?

1. on dit que N est nilpotente d'ordre 2

5)Pour toute matrice colonne $X(t) \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, on pose $Y(t) = X(t)e^{2t}$.

a)Etablir que $\forall t \in \mathbf{R},\ X'(t) = AX(t) \Longleftrightarrow Y'(t) = (A+2I)Y(t)$.

b)A l'aide des questions 3)b) et 4)a), conclure que les solutions de (S_2) sont de la forme $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ où

$$\begin{cases} x(t) & = \big((a-b)t + a\big)e^{-2t} \\ \\ y(t) & = \big((a-b)t + b\big)e^{-2t} \end{cases}$$

Partie III

Dans cette partie, on retrouve le résultat de la question 5)b) d'une autre manière.

6)Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ une solution de (S_2).

a)Montrer que $\forall t \in \mathbf{R},\ x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0$.

b)En déduire $x(t)$, puis $y(t)$ en fonction de t.

7)Réciproquement, vérifier que la matrice colonne $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ où $x(t)$ et $y(t)$ sont les fonctions trouvées en 6)b), est solution de (S_2).

8)Retrouver le résultat de la question 5)b).

Partie IV

Dans cette partie, on fait une étude qualitative des solutions de (S_2), système pour lequel on peut revenir à l'écriture habituelle :

$$\begin{cases} x'(t) & = -x(t) - y(t) \\ \\ y'(t) & = x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

9)Déterminer l'unique point d'équilibre de (S_2).

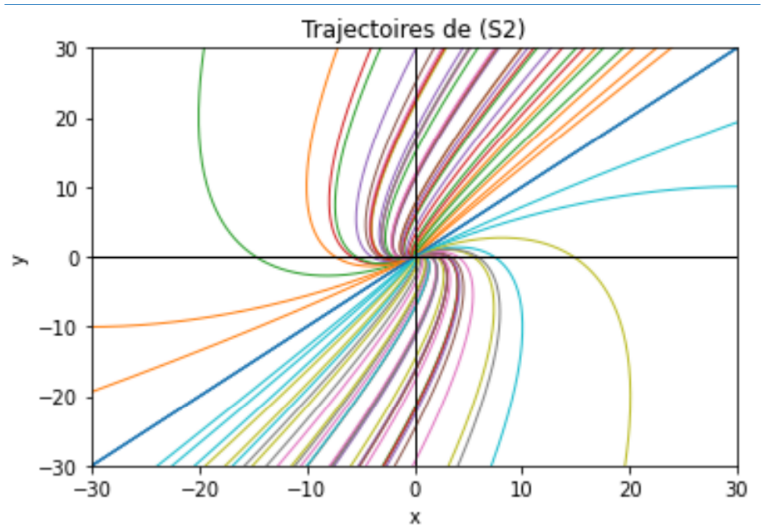
10)Soit $T = \big\{\big(x(t), y(t)\big), t \in \mathbf{R}\big\}$ une trajectoire de (S_2), distincte de la trajectoire d'équilibre.
On pose $x(t) = \big((a-b)t + a\big)e^{-2t}$ et $y(t) = \big((a-b)t + b\big)e^{-2t}$.

a)Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$. Que peut-on conclure ?

b)Montrer que s'il existe des réels m et p tels que $\forall t \in \mathbf{R},\ y(t) = mx(t) + p$, alors on a : $p = 0$, $m = 1$ et $a = b$.
Indication : commencer par montrer que $p = 0$, à l'aide de la question 10)a).

c)Conclure que parmi toutes les trajectoires de (S_2), exactement deux d'entre elles sont des demi-droites.

d)Commenter la figure ci-dessous.



11)On considère les trajectoires T_1, T_2 et T_3 obtenues en choisissant dans la question 5)b) les valeurs suivantes de a et b :

- $a = 1$ et $b = 1$ pour T_1,
- $a = -1$ et $b = -1$ pour T_2,
- $a = 2$ et $b = 1$ pour T_3.

Identifier les trajectoires T_1, T_2 et T_3 sur le graphique ci-dessous :

Indication : attention, il y a un intrus ! Pour la trajectoire T_3, on pourra étudier les variations de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.