Exercice 1 (ecricome 2020)

Partie A :

1)$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $(M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2)$(M - I_3)^2 = 0$ donc $P(X) = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de M.
D'après le cours, $sp(M) \subset \{\text{racines de } P\}$, c'est-à-dire $sp(M) \subset \{1\}$.
1 est donc l'unique valeur propre possible de M.

3)0 n'est pas valeur propre de M donc M est inversible.

$M - I_3$ est de rang inférieur à 3 car sa deuxième colonne est nulle.
Elle n'est donc pas inversible, ce qui prouve que 1 est valeur propre de M et en conséquence que $sp(M) = \{1\}$.

Supposons M diagonalisable. Alors, il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ inversible et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$, où D porte sur sa diagonale les valeurs propres de M.
On a donc $D = I_3$, puis $M = PI_3P^{-1} = I_3$, d'où une contradiction.

Donc M n'est pas diagonalisable.

Partie B :

1)Ici, $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons $E_1(M) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (M - I)U = 0\}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}(M - I)U = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x - y - z = 0 \\ &\iff x = y + z.\end{aligned}$$

Donc $E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y + z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

D'où $E_1(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$E_1(M) \neq \{0\}$ donc 1 est valeur propre de M.

Le sous-espace propre de M associé à 1 est $E_1(M)$, donnons-en une base.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_1(M)$ et libre car formée de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $E_1(M)$ et $dimE_1(M) = 2$.

5)Les colonnes C_1, C_2 et C_3 de M sont liées car $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.
Donc M est de rang inférieur à 3, en conséquence M n'est pas inversible.

6)M n'est pas inversible donc 0 est valeur propre de M et $dimE_0(M) \geq 1$.

Par ailleurs, on a vu que $dimE_1(M) = 2$.

On déduit que $dimE_0(M) + dimE_1(M) \geq 3$.

Or, d'après le cours, $dimE_0(M) + dimE_1(M) \leq 3$.

Les deux inégalités donnent : $dimE_0(M) + dimE_1(M) = 3 \quad (*)$

Si M possédait une troisième valeur propre λ distincte de 0 et 1, alors on aurait $dimE_0(M) + dimE_1(M) + dimE_\lambda(M) \geq 4$, ce qui n'est pas possible.
Donc $sp(M) = \{0, 1\}$.

Enfin, $(*)$ et le théorème de réduction montrent que M est diagonalisable.

Partie C :

7)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$a.u + b.v + c.w = 0 \Longleftrightarrow a.(1,1,1) + b.(1,0,1) + c.(1,1,0) = (0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccl} a & + & b & + & c & = & 0 & L_1 \\ a & & & + & c & = & 0 & L_2 \\ a & + & b & & & = & 0 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccl} a & + & b & + & c & = & 0 & L_1 \\ & & b & & & = & 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & & & & c & = & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow a = b = c = 0.$$

Donc la famille (u, v, w) est libre.

C'est une famille libre de $\mathbf{R}^3$ dont le cardinal vaut 3 et coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

8)Le vecteur colonne de $f(u)$ dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$MU = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}.$$

Donc $f(u) = (a, a, a)$.
De même, le vecteur colonne de $f(v)$ dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$MV = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $f(v) = (1, 0, 1)$.

9)Comme précédemment, le vecteur colonne de $f(w)$ dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$MW = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Donc $f(w) = (a+1, 1, a)$.

Puis, $f(w) = \alpha v + \beta w \iff (a+1, 1, a) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(1, 1, 0)$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta = a+1 \\ \beta = 1 \\ \alpha = a \end{cases}$$

$$\iff \alpha = a \text{ et } \beta = 1.$$

Donc $f(w) = a.v + w$.

10)Des questions 8) et 9), on déduit :

$f(u) = a.u = a.u + 0.v + 0.w$,

$f(v) = v = 0.u + 1.v + 0.w$,

$f(w) = 0.u + a.v + 1.w$.

Ce qui donne : $T = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11)T est triangulaire. Ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, elles valent donc 1 et a.
Ce sont aussi les valeurs propres de f donc de M.
Ainsi, $sp(M) = \{1, a\}$.

$$T - aI_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}.$$

$T - aI_3$ est de rang 2 car sa première colonne est nulle et ses deux autres colonnes sont non nulles (du fait que $a \neq 1$) et non colinéaires.
Or, $T - aI_3 = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f - a\mathrm{Id})$ donc $rg(f - a\mathrm{Id}) = rg(T - aI_3) = 2$.

Le théorème du rang donne alors :

$dimE_a(f) = dimKer(f - a\mathrm{Id}) = dim\mathbf{R}^3 - rg(f - a\mathrm{Id}) = 3 - 2 = 1$.

Comme $E_a(f)$ et $E_a(M)$ ont même dimension, on déduit : $dimE_a(M) = 1$.

$T - I_3 = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$T - I_3$ est de rang 2 car sa deuxième colonne est nulle et ses deux autres colonnes sont non nulles (du fait que $a \neq 1$) et non colinéaires.
Or, $T - I_3 = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f - \mathrm{Id})$ donc $rg(f - \mathrm{Id}) = rg(T - I_3) = 2$.

Le théorème du rang donne alors :

$dimE_1(f) = dimKer(f - \mathrm{Id}) = dim\mathbf{R}^3 - rg(f - \mathrm{Id}) = 3 - 2 = 1$.

Comme $E_1(f)$ et $E_1(M)$ ont même dimension, on déduit : $dimE_1(M) = 1$.

$E_1(M)$ et $E_a(M)$ sont les seuls sous-espaces propres de M et la somme de leurs dimensions vaut 2, alors que $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
D'après le théorème de réduction, M n'est pas diagonalisable.

✓ Il était possible aussi de chercher une base des sous-espaces propres $E_1(M)$ et $E_a(M)$.

Exercice 2 (ecricome 2020)

Partie A :

1)La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{2n}-1}{t+1}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.

D'après le cours, f_n est une primitive sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$.

f_n est donc dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \geq 0,\ f_n'(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$.

Enfin, f_n' est continue sur $\mathbf{R}_+$ comme quotient de deux fonctions polynomiales (continues).

Ainsi, f_n est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$.

2)$\forall x \geq 0,\ x+1 > 0$ donc $f_n'(x) \geq 0 \iff x^{2n}-1 \geq 0 \iff x^{2n} \geq 1 \iff x \geq 1$ la dernière équivalence provenant de la croissance de $t \mapsto t^{2n}$ sur $[1, +\infty[$.

f_n est donc décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

3)f_n' est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+$ comme quotient de deux fonctions polynomiales (de classe C^1). Ainsi, f_n est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+$ et pour tout $x \geq 0$:

$$f_n''(x) = \big(f_n'(x)\big)' = \frac{2nx^{2n-1}(x+1) - (x^{2n}-1)}{(x+1)^2} = \frac{(2n-1)x^{2n} + 2nx^{2n-1} + 1}{(x+1)^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \geq 0$, le numérateur est positif comme somme de nombres positifs.

Le dénominateur est positif car c'est un carré.

Donc $\forall x \geq 0,\ f_n''(x) \geq 0$, ce qui montre que f_n est convexe sur $\mathbf{R}_+$.

4)a)$g_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \geq 1,\ g_n'(x) = nx^{n-1}$.
On a alors $\forall x \geq 1,\ g_n'(x) \geq n$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels a et b de $[1, +\infty[$ tels que $a \leq b$, on a : $g_n(b) - g_n(a) \geq n(b-a)$.

En prenant $a = 1$ et $b = t^2$, on obtient pour tout $t \geq 1$:

$g_n\big(t^2\big) - g_n(1) \geq n\big(t^2-1\big)$, c'est-à-dire : $\big(t^2\big)^n - 1^n \geq n\big(t^2-1\big)$.

On conclut que $\forall t \geq 1,\ t^{2n} - 1 \geq n(t^2-1)$.

✓ On pouvait aussi étudier les variations, puis le signe sur $[1, +\infty[$ de la fonction $h : t \mapsto t^{2n} - 1 - n(t^2-1)$.

4)b)Pour tout $x \geq 1$, on a :

$$f_n(x) - f_n(1) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt - \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \quad (*)$$

En remarquant que $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, l'inégalité 4)a) s'écrit :

$\forall t \geq 1,\ \dfrac{t^{2n}-1}{t+1} \geq n(t-1)$.

En intégrant cette inégalité entre les bornes croissantes 1 et x, on obtient :

$$\int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \geq \int_1^x n(t-1)dt \quad (**)$$

Or, $\displaystyle\int_1^x n(t-1)dt = \left[n\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^x = n\frac{(x-1)^2}{2}$.

En recollant $(*)$ et $(**)$, on déduit : $f_n(x) - f_n(1) \geq n\dfrac{(x-1)^2}{2}$.

Ainsi, $\forall x \geq 1,\ f_n(x) \geq f_n(1) + \dfrac{(x-1)^2}{2}$.

4)c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(1) + \frac{(x-1)^2}{2} = +\infty$.

Par passage à la limite dans 4)b) : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

5) $f_n(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = 0$.

f_n est décroissante sur $[0,1]$ (voir A2). Donc $f_n(1) < f_n(0) = 0$.

6)La question A2) donne :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$f_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

f_n est strictement négative sur $]0,1]$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ ne possède pas de solution sur $]0,1]$.

f_n est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
D'après le théorème de bijection, elle réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]f_n(1),+\infty[$.
Or, $0 \in\ ]f_n(1),+\infty[$ car $f_n(1) < 0$.
0 admet donc un unique antécédent par f_n dans $]1,+\infty[$.
Notons x_n cet antécédent, il est alors l'unique solution strictement positive de l'équation $f_n(x) = 0$ et tel que $x_n > 1$.

Partie B :

7)Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2n+2}-1}{t+1}dt - \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \\
&= \int_0^x \left(\frac{t^{2n+2}-1}{t+1} - \frac{t^{2n}-1}{t+1} \right) dt \\
&= \int_0^x \frac{t^{2n+2}-t^{2n}}{t+1}dt \\
&= \int_0^x \frac{t^{2n}(t^2-1)}{t+1}dt \\
&= \int_0^x \frac{t^{2n}\cancel{(t+1)}(t-1)}{\cancel{t+1}}dt \\
&= \int_0^x \left(t^{2n+1} - t^{2n} \right) dt \\
&= \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2} - \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x \\
&= \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right).
\end{aligned}
$$

8)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$x \geq \dfrac{2n+2}{2n+1} \iff \dfrac{x}{2n+2} \geq \dfrac{1}{2n+1} \iff \dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1} \geq 0.$

Ainsi, $\forall x \geq \dfrac{2n+2}{2n+1},\ \dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1} \geq 0$ et $x^{2n+1} \geq 0$.

Par produit, $\forall x \geq \dfrac{2n+2}{2n+1},\ x^{2n+1} \left(\dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1} \right)$.

Compte tenu de la question 7), on déduit : $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \geq \dfrac{2n+2}{2n+1}, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

8)b)L'hypothèse de l'énoncé $x_n \geq \dfrac{2n+2}{2n+1}$ permet d'appliquer l'inégalité de la question 8)a) avec $x \to x_n$, ce qui donne : $f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n) = 0$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geq 0$.

8)c)Par construction, x_{n+1} est racine de f_{n+1} donc $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

Grâce à la question 8)b), on a alors $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$.

Comme x_n et x_{n+1} sont des éléments de $[1, +\infty[$ et que f_{n+1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on peut déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ x_n \geq x_{n+1}$.

On conclut que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.

Par ailleurs, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est minorée par 1, ce qui permet de conclure qu'elle est convergente.

9)a)On sait déjà que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ f_n(1) \leq 0$ d'après la question 5).

Majorons maintenant $f_n(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt$.

Pour tout $t \in [0,1]$, on a : $t^{2n} \geq 0$ donc $t^{2n}-1 \geq -1$, puis en divisant membre à membre par $t+1>0$:

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq -\frac{1}{t+1}.$$

En intégrant l'inégalité entre les bornes croissantes 0 et 1, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt \geq \int_0^1 -\frac{1}{t+1}dt.$$

Enfin, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}dt = f_n(1)$ et $\displaystyle\int_0^1 -\frac{1}{t+1}dt = \big[-\ln(t+1)\big]_0^1 = -\ln 2$.

Donc $f_n(1) \geq -\ln 2$.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ -\ln 2 \leq f_n(1) \leq 0$.

9)b)On sait déjà grâce à la question 6) que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq x_n - 1$.

Pour obtenir l'inégalité de droite, utilisons la question 4)b) avec $x \to x_n$, ce qui est licite car $x_n \geq 1$.

On obtient pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $\underbrace{f_n(x_n)}_{=0} \geq f_n(1) + \dfrac{n}{2}(x_n-1)^2$

ou encore $\dfrac{n}{2}(x_n-1)^2 \leq -f_n(1) \quad (*)$

Or, d'après la question 9)a) : $f_n(1) \geq -\ln 2$ donc $-f_n(1) \leq \ln 2 \quad (**)$

Par recollement de $(*)$ et $(**)$, on a : $\dfrac{n}{2}(x_n-1)^2 \leq \ln 2$,

puis $(x_n-1)^2 \leq \dfrac{2\ln 2}{n}$.

Par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, on déduit : $\sqrt{(x_n-1)^2} \leq \sqrt{\dfrac{2\ln 2}{n}}$.

Enfin, $\sqrt{(x_n-1)^2} = \big|x_n - 1\big| = x_n - 1$ car $x_n - 1 \geq 0$.

Donc $x_n - 1 \leq \sqrt{\dfrac{2\ln 2}{n}}$.

Finalement, $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\dfrac{2\ln 2}{n}}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2\ln 2}{n}} = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(x_n-1) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Partie C :

10)La fonction $(x, y) \mapsto x$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ (car polynômiale) et à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.
f_n est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$.
Par composée, $(x, y) \mapsto f_n(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

De même, $(x, y) \mapsto f_n(y)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

Par produit, $(x, y) \mapsto f_n(x)f_n(y)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$, on a :

$\partial_1 G_n(x, y) = f_n'(x)f_n(y)$ et $\partial_2 G_n(x, y) = f_n(x)f_n'(y)$.

11)Soit $(x, y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

(x, y) est un point critique de G_n

$\iff \partial_1 G_n(x, y) = 0$ et $\partial_2 G_n(x, y) = 0$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} f_n'(x)f_n(y) = 0 \\ \qquad \text{et} \\ f_n(x)f_n'(y) = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} f_n'(x) = 0 \text{ ou } f_n(y) = 0 \\ \qquad\quad \text{et} \\ f_n(x) = 0 \text{ ou } f_n'(y) = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = 1 \text{ ou } y = x_n \\ \qquad\quad \text{et} \\ x = x_n \text{ ou } y = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = 1 \text{ et } y = 1 \\ \qquad\quad \text{ou} \\ x = x_n \text{ et } y = x_n \end{array}\right.$$

Les points critiques de G_n sont donc $(1, 1)$ et (x_n, x_n).

12)G_n est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ donc admet des dérivées partielles d'ordre deux données par :

$\partial_{1,1}^2 G_n(x, y) = \partial_1\big(\partial_1 G_n(x, y)\big) = \partial_1\big(f_n'(x)f_n(y)\big) = f_n''(x)f_n(y)$,
$\partial_{1,2}^2 G_n(x, y) = \partial_1\big(\partial_2 G_n(x, y)\big) = \partial_1\big(f_n(x)f_n'(y)\big) = f_n'(x)f_n'(y)$,
$\partial_{2,1}^2 G_n(x, y) = \partial_2\big(\partial_1 G_n(x, y)\big) = \partial_2\big(f_n'(x)f_n(y)\big) = f_n'(x)f_n'(y)$,
$\partial_{2,2}^2 G_n(x, y) = \partial_2\big(\partial_2 G_n(x, y)\big) = \partial_2\big(f_n(x)f_n'(y)\big) = f_n(x)f_n''(y)$.

On déduit : $\nabla^2 G_n(x_n, x_n) = \begin{pmatrix} f_n''(x_n)f_n(x_n) & f_n'(x_n)f_n'(x_n) \\ f_n'(x_n)f_n'(x_n) & f_n(x_n)f_n''(x_n) \end{pmatrix}$.

Or, $f_n(x_n) = 0$ donc $\nabla^2 G_n(x_n, x_n) = \begin{pmatrix} 0 & \big(f_n'(x_n)\big)^2 \\ \big(f_n'(x_n)\big)^2 & 0 \end{pmatrix}$.

De même, $\nabla^2 G_n(1,1) = \begin{pmatrix} f_n''(1)f_n(1) & f_n'(1)f_n'(1) \\ f_n'(1)f_n'(1) & f_n(1)f_n''(1) \end{pmatrix}$.

Or, $f_n'(1) = 0$ et $f_n''(1) = \dfrac{2n-1+2n+1}{4} = n$, grâce à la question 3).

Donc $\nabla^2 G_n(1,1) = \begin{pmatrix} nf_n(1) & 0 \\ 0 & nf_n(1) \end{pmatrix}$.

13)λ est valeur propre de $\nabla^2 G_n(x_n, x_n)$
$\iff \nabla^2 G_n(x_n, x_n) - \lambda I_2$ n'est pas inversible
$\iff det\big(\nabla^2 G_n(x_n, x_n) - \lambda I_2\big) = 0.$
$\iff (-\lambda) \times (-\lambda) - \big(f_n'(x_n)\big)^2 \times \big(f_n'(x_n)\big)^2 = 0$
$\iff \lambda^2 = \big(f_n'(x_n)\big)^4$
$\iff \lambda = \big(f_n'(x_n)\big)^2$ ou $\lambda = -\big(f_n'(x_n)\big)^2$.
Les valeurs propres de $\nabla^2 G_n(x_n, x_n)$ sont non nulles (car $f_n'(x_n) \neq 0$ du fait que $x_n \neq 1$) et de signes contraires.
Donc G_n n'admet pas d'extrémum local en (x_n, x_n) (c'est un point selle).

14)$\nabla^2 G_n(1,1)$ est diagonale. Ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, à savoir $nf_n(1)$.
On sait que $f_n(1) < 0$ d'après la question 5) donc $nf_n(1) < 0$.
Les valeurs propres (confondues) de $\nabla^2 G_n(1,1)$ sont srictement négatives.
Donc G_n admet en (1,1) un maximum local.

Exercice 3 (ecricome 2020)

1)$I_n(a)$ est une intégrale de Riemann convergente car son paramètre est $n \geq 2 > 1$.

$I_n(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{1}{t^n} dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x t^{-n} dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\right]_a^x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{(-n+1)t^{n-1}}\right]_a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{(-n+1)x^{n-1}} - \underbrace{\frac{1}{(-n+1)a^{n-1}}}_{constante}\right)$.

$n-1 \geq 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-1} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(-n+1)x^{n-1}} = 0$.

Donc $I_n(a) = -\frac{1}{(-n+1)a^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2)a)• $\forall t \geq 0,\ f(t) \geq 0$ car $a > 0$ et $t^4 \geq 0$.

• f est continue sur $]-\infty, a[$ (fonction nulle) et sur $[a, +\infty[$ comme quotient d'une fonction constante et d'une fonction polynomiale.

Donc f est continue sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en a.

• f est nulle sur $]-\infty, a[$ donc $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ converge et vaut 0.

$\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge car elle est de même nature que l'intégrale $I_4(a)$.

Par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et on a :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt = 0 + 3a^3 I_4(a) = 3a^3 \times \frac{1}{3a^3} = 1.$

Donc f est une densité de probabilité.

2)b)La fonction de répartition F_X de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

On distingue deux cas :

• premier cas : $x < a$

f est nulle sur $]-\infty, a[$ donc sur $]-\infty, x]$. Ainsi, $F_X(x) = 0$.

• second cas : $x \geq a$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^x f(t)dt = \int_{-\infty}^a 0dt + \int_a^x \frac{3a^3}{t^4} dt = 0 + 3a^3 \left[-\frac{1}{3t^3}\right]_a^x$

$= 3a^3 \left(-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3a^3}\right) = 1 - \frac{a^3}{x^3}$.

Ainsi, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \dfrac{a^3}{x^3} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$

2)c)X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ est absolument convergente.
f est nulle sur $]-\infty, a[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \big|tf(t)\big|dt$ converge et vaut 0.
De plus, $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} \big|tf(t)\big|dt = \int_{a}^{+\infty} \frac{3a^3}{t^3}dt$ converge car elle a même nature que l'intégrale convergente $I_3(a)$.
Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big|tf(t)\big|dt$ converge.
Donc X admet une espérance donnée par :
$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^{a} tf(t)dt + \int_{a}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{+\infty} \frac{3a^3}{t^3}dt$
$= 0 + 3a^3 I_3(a) = 3a^3 \times \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{3a}{2}$.
2)d)X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre deux, c'est-à-dire si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge.
Comme précédemment, on est ramené à prouver la convergence de $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} t^2 f(t)dt$, c'est-à-dire de $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} \frac{3a^3}{t^2}dt$.
Or, l'intégrale ci-dessus converge car elle a même nature que l'intégrale convergente $I_2(a)$.
Donc X admet un moment d'ordre deux donné par :
$E(X^2) = \displaystyle\int_{a}^{+\infty} \frac{3a^3}{t^2}dt = 3a^3 I_2(a) = 3a^3 \times \frac{1}{a} = 3a^2$.
Enfin, la formule de Koënig donne :
$V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2 = 3a^2 - \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 = \dfrac{3a^2}{4}$.
3)a)$\varphi : x \mapsto \dfrac{a}{x^{1/3}}$ est dérivable sur $]0, 1]$ et $\forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\dfrac{a}{3x^{4/3}} < 0$.
Donc φ est strictement décroissante sur $]0, 1]$.
De plus, φ est continue sur $]0, 1]$ comme quotient d'une fonction constante et d'une fonction puissance.
φ est une bijection de $]0, 1]$ sur $\varphi\big(]0, 1]\big) = \left[\varphi(1), \lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x)\right[= [a, +\infty[$.
Comme $U(\Omega) =]0, 1)$ on a donc $Y(\Omega) = [a, +\infty[$.
3)b)La fonction de répartition F_Y de Y est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_Y(x) = P(Y \leq x).$$

On distingue deux cas :

• premier cas : $x < a$
$F_Y(x) = 0$ car $Y(\Omega) = [a, +\infty[$.

• deuxième cas : $x \geq a$
$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\frac{a}{U^{1/3}} \leq x\right) = P\left(\frac{U^{1/3}}{a} \geq \frac{1}{x}\right) = P\left(U^{1/3} \geq \frac{a}{x}\right)$$
$$= P\left(U \geq \frac{a^3}{x^3}\right) = 1 - P\left(U < \frac{a^3}{x^3}\right) = 1 - F_U\left(\frac{a^3}{x^3}\right).$$
Or, $0 < \dfrac{a^3}{x^3} \leq 1$ et $\forall t \in]0,1],\ F_U(t) = t$. Donc $F_U\left(\dfrac{a^3}{x^3}\right) = \dfrac{a^3}{x^3}$.

On déduit que $F_Y(x) = 1 - \dfrac{a^3}{x^3}$.

Ainsi, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \dfrac{a^3}{x^3} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$

On remarque que $\forall x \in \mathbf{R},\ F_Y(x) = F_X(x)$.
Les variables aléatoires Y et X ont donc la même fonction de répartition et par conséquent, elles suivent la même loi.

3)c)Comme X et Y ont la même loi, il suffit de simuler nm valeurs de Y. On simule alors nm valeurs de U grâce à la fonction rand, puis on utilise l'égalité $Y = \dfrac{a}{U^{1/3}}$.

D'où le programme :

```
import numpy.random as rd
def simulX(a,m,n):
    U=rd.rand(m,n)
    Y=a/pow(U,1/3)
    return Y
```

4)a)$P(X > 2a) = 1 - P(X \leq 2a) = 1 - F_X(2a) = 1 - \left(1 - \dfrac{a^3}{(2a)^3}\right) = \dfrac{1}{8}$.

4)b)$P_{(X>2a)}(X > 6a) = \dfrac{P(X > 2a \cap X > 6a)}{P(X > 2a)} = \dfrac{P(X > 6a)}{P(X > 2a)}$
car comme $(X > 6a) \subset (X > 2a)$, on a : $(X > 2a \cap X > 6a) = (X > 6a)$.

Enfin, $P(X > 6a) = 1 - F_X(6a) = 1 - \left(1 - \dfrac{a^3}{(6a)^3}\right) = \dfrac{1}{216}$.

On déduit : $P_{(X>2a)}(X > 6a) = \dfrac{1/216}{1/8} = \dfrac{1}{27}$.

4)c)programme :

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a, 1, N)
for k in range(N):
    if X[0,k]>2*a :
        s1 = s1 + 1
        if X[0,k] > 6*a:
            s2=s2+1
if s1 > 0:
    print(s2/s1)
```

5)a)V_n est une fonction de l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$ qui ne dépend pas du paramètre a à estimer. Donc V_n est un estimateur de a.

X_1, ..., X_n admettent une espérance et V_n est une combinaison linéaire de X_1, ..., X_n.
Donc V_n admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned} E(V_n) &= E\left(\frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\ &= \frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) \text{ par linéarité} \\ &= \frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} E(X) \text{ car } X_k \text{ a même loi que } X \\ &= \frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} \frac{3a}{2} \\ &= \frac{2}{3n} \times n \times \frac{3a}{2} \\ &= a. \end{aligned}$$

Donc V_n est un estimateur sans biais de a.

5)b)X_1, ..., X_n admettent une variance et sont mutuellement indépendantes donc la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance.
Donc V_n admet une variance donnée par :

$$
\begin{aligned}
V(V_n) &= V\left(\frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= \left(\frac{2}{3n}\right)^2 V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\
&= \frac{4}{9n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) \text{ par indépendance mutuelle des } X_k \\
&= \frac{4}{9n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X) \text{ car } X_k \text{ a même loi que } X \\
&= \frac{4}{9n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{3a^2}{4} \\
&= \frac{4}{9n^2} \times n \times \frac{3a^2}{4} \\
&= \frac{a^2}{3n}.
\end{aligned}
$$

Comme V_n est sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance et vaut donc $\dfrac{a^2}{3n}$.

6)a)Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$
\begin{aligned}
F_{W_n}(x) &= P(W_n \leq x) \\
&= 1 - P(W_n > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x \cap ... \cap X_n > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x) \cdots P(X_n > x) \text{ par indépendance des } X_k \\
&= 1 - P(X > x)^n \text{ car } X_k \text{ a même loi que } X \\
&= 1 - \big(1 - P(X \leq x)\big)^n \\
&= 1 - \big(1 - F_X(x)\big)^n.
\end{aligned}
$$

Or, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \dfrac{a^3}{x^3} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$

Donc $F_{W_n}(x) = \begin{cases} 1 - (1-0)^n & \text{si } x < a \\ 1 - \big(1 - (1 - \dfrac{a^3}{x^3})\big)^n & \text{si } x \geq a. \end{cases}$

Après simplifications, $F_{W_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \dfrac{a^{3n}}{x^{3n}} & \text{si } x \geq a. \end{cases}$

F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en a.
De même pour F_{W_n}, grâce à l'égalité : $\forall x \in \mathbf{R},\ F_{W_n}(x) = 1-\big(1-F_X(x)\big)^n$.
Donc W_n est une variable aléatoire à densité.

6)b)Une densité f_n de W_n est obtenue en dérivant F_{W_n} aux points où F_{W_n} est dérivable, c'est-à-dire sur $\mathbf{R} \setminus \{a\}$ et en lui attribuant une valeur arbitraire positive en a.

On a donc $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \left(1 - \dfrac{a^{3n}}{t^{3n}}\right)' & \text{si } t > a. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t > a. \end{cases}$

On peut prendre $f_n(a) = \dfrac{3na^{3n}}{a^{3n+1}} = \dfrac{3n}{a}$ de sorte à recoller avec la formule de f_n sur $]a, +\infty[$.

Finalement, $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a. \end{cases}$

6)c)W_n admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_n(t)dt$ est absolument convergente.
f_n est nulle sur $]-\infty, a[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \big|tf_n(t)\big|dt$ converge et vaut 0.
De plus, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big|tf_n(t)\big|dt = \int_a^{+\infty} \frac{3na^{3n}}{t^{3n}}dt$ converge car elle a même nature que l'intégrale convergente $I_{3n}(a)$.
Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big|tf_n(t)\big|dt$ converge.
Donc W_n admet une espérance donnée par :
$E(W_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_n(t)dt = \int_{-\infty}^{a} tf_n(t)dt + \int_a^{+\infty} tf_n(t)dt = \int_a^{+\infty} \frac{3na^{3n}}{t^{3n}}dt$
$= 3na^{3n}I_{3n}(a) = 3na^{3n} \times \dfrac{1}{(3n-1)a^{3n-1}} = \dfrac{3na}{3n-1}$.

Enfin, $E(\lambda_n W_n) = a \Leftrightarrow \lambda_n E(W_n) = a \Leftrightarrow \lambda_n = \dfrac{a}{E(W_n)} \Leftrightarrow \lambda_n = \dfrac{3n-1}{3n}$.

6)d)W_n admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre deux, c'est-à-dire si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)dt$ converge.

On est ramené à prouver la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^2 f_n(t)dt$, c'est-à-dire de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{3na^{3n}}{t^{3n-1}}dt$.

Or, l'intégrale ci-dessus converge car elle a même nature que l'intégrale convergente $I_{3n-1}(a)$.

Donc W_n admet un moment d'ordre deux donné par :

$$E(W_n^2) = \int_a^{+\infty} \frac{3na^{3n}}{t^{3n-1}} dt = 3na^{3n} I_{3n-1}(a) = 3na^{3n} \times \frac{1}{(3n-2)a^{3n-2}}$$
$$= \frac{3na^2}{3n-2}.$$

Puis, la formule de Koënig donne :

$$V(W_n) = E\big(W_n^2\big) - E(W_n)^2 = \frac{3na^2}{3n-2} - \left(\frac{3na}{3n-1}\right)^2 = \left(\frac{3n}{3n-2} - \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^2\right) a^2.$$

Enfin, $\lambda_n W_n$ admet une variance donnée par :

$$\begin{aligned}
V(\lambda_n W_n) &= \lambda_n^2 V(W_n) \\
&= \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \left(\frac{3n}{3n-2} - \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^2\right) a^2 \\
&= \left(\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \times \frac{3n}{3n-2} - 1\right) a^2 \\
&= \left(\frac{(3n-1)^2}{3n(3n-2)} - 1\right) a^2 \\
&= \frac{(3n-1)^2 - 3n(3n-2)}{3n(3n-2)} a^2 \\
&= \frac{9n^2 - 6n + 1 - 9n^2 + 6n}{3n(3n-2)} a^2 \\
&= \frac{a^2}{3n(3n-2)}.
\end{aligned}$$

Comme $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais de a, son risque quadratique est égal à sa variance.

7)a)programme :

```
import numpy as np
def simulV(a,m,n):
    X=simulX(a,m,n)
    V=np.zeros(shape=(1,m))
    for k in range(m):
        V[0,k]=2/(3*n)*sum(X[k,:])
    return V
```

7)b)D'après les questions précédentes, V_n et $\lambda_n W_n$ sont des estimateurs sans biais de a.
Cependant, le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ vaut $\dfrac{a^2}{3n(3n-2)}$ alors que celui de V_n vaut $\dfrac{a^2}{3n}$.

Le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ est donc plus petit que celui de V_n, ce qui prouve que $\lambda_n W_n$ est un meilleur estimateur que V_n.
Les valeurs prises par $\lambda_n W_n$ sont donc plus regroupées autour de a que celles prises par V_n.
Graphiquement, on a donc $a = 5$, les "+" représentant $\lambda_n W_n$ et les "x" représentant V_n.
Enfin, il y a 20 points pour chaque nuage donc $m = 20$.

Programme :

```
import matplotlib.pyplot as plt
W=simulW(5,20,100)
V=simulV(5,20,100)
abscisse=np.array([[k for k in range(1,21)]])
plt.plot(abscisse,V,"x")
plt.plot(abscisse,W,"+")
```