ECRICOME 2011

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.
On dit qu'une matrice $A \in M_n(R)$ est nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que

$$A^{k-1} \neq 0_n \text{ et } A^k = 0_n$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n.
Soit $A \in M_n(R)$. On dit que le couple (Δ, N) est une *décomposition de Dunford* de A si

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.
Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Déterminer les valeurs propres de A.
   b) A est-elle diagonalisable ?
3. On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   a) Calculer les produits ΔX_1, ΔX_2 et ΔX_3.
   b) Justifier que Δ est diagonalisable et déterminer P inversible telle que $\Delta = PDP^{-1}$.
   c) Calculer P^{-1}.
4. a) Etablir que N est une matrice nilpotente.
   b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.
   c) En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner pour tout entier $p \geq 1$, l'expression de A^p en fonction des puissances de Δ, de N et de p.
   d) Etablir que pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\quad \Delta^k N = N\Delta^k = N$.
   e) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\quad \Delta^k = PD^kP^{-1}$.
   f) Proposer pour tout entier $p \geq 1$, une décomposition de Dunford de A^p.

EXERCICE 2

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x, y) = xy + \ln(x)\ln(y)$$

PARTIE I. Etude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque $.x$ tend vers $+\infty$, ainsi que : la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Prouver que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Justifier la dérivabilité de φ, sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Montrer que φ est dérivable en 0. Donner l'allure de la représentation graphique de φ au voisinage du point d'abscisse 0.
5. Dresser le tableau de variations de φ
6. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer l'existence d'un unique réel α tel que : $\varphi(\alpha) = 0$ et justifier que : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.
7. Etablir la convergence de l'intégrale $I = \int_0^\alpha \varphi(x)\,dx$ et vérifier que $I = \frac{\alpha(6+\alpha^2)}{9}$.
8. On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
   $a_0 = \sqrt{2}$ et $b_0 = 2$,
   $\forall n \geq 0$, si $\varphi(a_n)\,\varphi\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$
   $\forall n \geq 0$, si $\varphi(a_n)\,\varphi\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0$ alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$
   Ecrire un programme en Python calculant a_7 et b_7

PARTIE II. Extrema de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$

Rappelons que α est l'unique réel vérifiant $\varphi(\alpha) = 0$.

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\alpha}\right)$ est l'unique point critique de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$
3. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et établir que pour tous réels x et y strictement positifs :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\dfrac{1}{y}\right)\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1 + \dfrac{1}{xy} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \end{cases}$$

4. La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$? Si oui, en donner la nature (maximum ou minimum)

EXERCICE 3

PARTIE I. Un jeu en ligne.

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.
Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :
— H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
— V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
— D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
— N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
2. Déterminer les probabilités $\mathrm{P}(H)$, $\mathrm{P}(V)$, $\mathrm{P}(D)$ des événements $H, .V, .D$.
3. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à :

$$\mathrm{P}(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.
   a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{ème}$ relance. Calculer l'espérance mathématique $E(Z_i)$ de Z_i .
   b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un Joueur décide de ,jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
   a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
   b) Indiquer l'espérance et la variance de X.
   c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X.
2. Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ? (On admettra que $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \simeq -0,1$ et $\ln(2) \simeq 0,7$)
3. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée . On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.
   a) Donner la loi de la variable aléatoire Y .
   b) Indiquer l'espérance et la variance de Y.

c) Pour tout entier naturel k, montrer que la probabilité p_k. que le joueur .joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois, est donnée par la formule :

$$p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$$

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée »et on pose $\mathrm{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_\Delta(H)$, $\mathrm{P}_\Delta(V)$, $\mathrm{P}_\Delta(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ.
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ pour en déduire que la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à :

$$\mathrm{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$$

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance de gain soit positive.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ?