Chapitre 16 : Variables aléatoires à densité

I)Introduction

Les variables aléatoires rencontrées ici ont deux particularités :
− $X(\Omega)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.
− $\forall x \in \mathbf{R},\ P(X = x) = 0$.

Pour celles-ci, on s'interesse à la probabilité pour que X prenne une valeur dans un intervalle donné, par exemple : $P(a < X < b)$, $P(X \geq a)$, etc ...

<u>Exemple</u>
Considérons une ampoule dont la durée de vie maximale est de 1000 h.
Soit X =durée de vie de l'ampoule.
X est une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = [0, 1000]$.
La probabilité pour que l'ampoule meurt à un instant précis est nulle, ce qui se traduit par $\forall x \in \mathbf{R},\ P(X = x) = 0$.
En revanche, la probabilité, par exemple que l'ampoule ait une durée de vie comprise entre 100h et 200h n'est pas nulle, elle vaut $P(100 \leq X \leq 200)$.

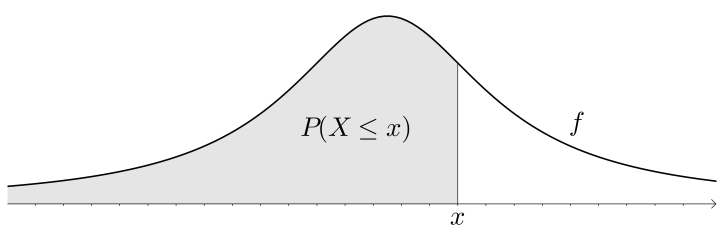
II)Densité

Déf : on dit qu'une fonction f est une densité si :

- f est continue sur $\mathbf{R}$ (sauf peut-être en un nombre fini de points),
- $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \geq 0$,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Déf : on dit qu'une variable aléatoire X est à densité s'il existe une densité f telle que $\forall x \in \mathbf{R},\ P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

On dit alors que X a pour densité f.



<u>Exercice 1</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0. \end{cases}$

Montrer que f est une densité.

Propriété 1
Pour tout x réel et toute variable aléatoire X de densité f, on a :
• $P(X = x) = 0$,
• $P(X < x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$,
• $P(X > x) = P(X \geq x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

✓ Toute fonction g positive, égale à f, sauf en un nombre fini de points, est une densité de X.

III)Fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité

Déf : soit X une variable aléatoire à densité, de densité f.
On appelle fonction de répartition de X la fonction, notée F, définie par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Propriété 2
Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F.

1)F est croissante sur $\mathbf{R}$.

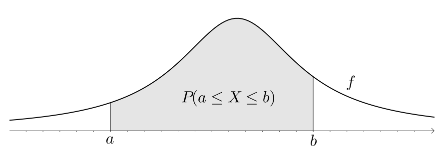
2)F est continue sur $\mathbf{R}$.

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

4)F est de classe C^1 en tout point où f est continue.

Propriété 3
Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F.
Pour tous réels a et b (avec $a \leq b$), on a :

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X \leq b) \\ &= P(a \leq X \leq b) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$



<u>Exercice 2</u>

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0. \end{cases}$

Déterminer la fonction de répartition F de X, puis tracer l'allure de (C_f) et (C_F).

Théorème 1
Soit X une variable aléatoire et F sa fonction de répartition.
X est à densité si et seulement si F est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points).

Toute densité f de X vaut alors :

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) \text{ aux points où } F \text{ est dérivable} \\ \\ \text{une valeur positive ou nulle arbitraire sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3
Soit X, une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geq 2 \\ \\ 0 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

1)Montrer que X est une variable aléatoire à densité.

2)Déterminer une densité f de X.

IV)Fonction d'une variable aléatoire à densité

Déf : soit X une variable aléatoire à densité et soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction.
Par composition, on définit la variable aléatoire $Y = goX$, notée $Y = g(X)$.

Propriété 4
Soit X une variable aléatoire de densité f_X, de fonction de répartition F_X.
Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction.
Dans la plupart des cas, $Y = g(X)$ est une variable aléatoire à densité.
En notant F_Y la fonction de répartition de Y, une densité f_Y de Y se détermine à l'aide du schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} f_X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "?"'] & F_X \arrow[d] \\ f_Y & F_Y \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Exercice 4
Soit X une variable aléatoire de densité f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1)Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2)Pour chacun des cas suivants, déterminer une densité f_Y de Y :
a)$Y = 2X + 1$,
b)$Y = \ln X$,
c)$Y = e^X$.

<u>Exercice 5</u>
Soit X une variable aléatoire de densité f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1)Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2)Pour chacun des cas suivants, déterminer une densité f_Y de Y :
a)$Y = |X|$,
b)$Y = X^2$.

V)Espérance d'une variable aléatoire à densité

Déf : soit X une variable aléatoire de densité f.
On dit que X admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
On appelle alors espérance de X le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t.$$

Déf : on dit qu'une variable aléatoire X à densité est centrée si $E(X) = 0$.

Propriété 5
Soit X une variable aléatoire à densité. Soient a et b deux réels quelconques.
Si X admet une espérance, alors $aX + b$ admet une espérance. De plus, on a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Théorème 2 (linéarité de l'espérance)
Soient X_1, ..., X_n des variables aléatoires à densité admettant une espérance.
Pour tous réels a_1, ..., a_n, la variable aléatoire $a_1X_1 + ... + a_nX_n$ est à densité et admet une espérance donnée par :

$$E(a_1X_1 + ... + a_nX_n) = a_1E(X_1) + ... + a_nE(X_n).$$

Théorème 3 (théorème de transfert)
Soit X une variable aléatoire de densité f.
Soit g une fonction continue sur $\mathbf{R}$ (sauf éventuellement en quelques points).
Alors, la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente. De plus, on a :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 6

Soient $\lambda > 1$ une constante et X une variable aléatoire de densité f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1)Montrer que X admet une espérance et la calculer.

2)Soit $Y = e^X$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

VI)Variance et écart-type d'une variable aléatoire à densité

Déf : soit X une variable aléatoire de densité f admettant une espérance.

On dit que X admet une variance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(t - E(X)\big)^2 f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

On appelle variance de X le nombre réel positif, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(t - E(X)\big)^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

Déf : on dit qu'une variable aléatoire X à densité est réduite si $V(X) = 1$.

Déf : soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance.
On appelle écart-type de X, le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Théorème 4 (formule de Koenig-Huygens)
Soit X une variable aléatoire de densité f admettant une espérance.
Alors, X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance.
De plus, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Propriété 6
Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance.
Soient a et b deux réels quelconques. Alors $aX + b$ admet une variance et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Propriété 7
Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance et une variance.

Alors, la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

VII) Variables aléatoires à densité indépendantes

Déf : on dit que les variables aléatoires à densité X et Y sont indépendantes si $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ P\big((X \leq x) \cap (Y \leq y)\big) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$.

Déf : on dit que les variables aléatoires à densité X_1, ...,X_n sont mutuellement indépendantes si :
$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n,\ P\big((X_1 \leq x_1) \cap ... \cap (X_n \leq x_n)\big) = P(X_1 \leq x_1)...P(X_n \leq x_n)$.

Théorème 5
Soient X_1, ...,X_n des variables aléatoires à densité admettant une variance.
Si X_1, ...,X_n sont mutuellement **indépendantes**, alors $X_1 + ... + X_n$ admet une variance et on a :

$$V(X_1 + ... + X_n) = V(X_1) + ... + V(X_n).$$

Théorème 6
Soient X_1, ...,X_n des variables aléatoires à densité admettant une espérance.
Si X_1, ...,X_n sont mutuellement **indépendantes**, alors $X_1...X_n$ admet une espérance et on a :

$$E(X_1...X_n) = E(X_1)...E(X_n).$$

Propriété 8 (lemme des coalitions)
Si les variables aléatoires à densité X_1, ...,X_n sont mutuellement indépendantes, alors toute variable aléatoire fonction de certaines d'entre elles est indépendante de toute variable aléatoire fonction des autres.