CONCOURS BLANC EML 91 points

72% = 20/20

EXERCICE 1 24 points

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Partie I : Réduction de A 8

1. Est-ce que A est inversible ? 0,5
2. Déterminer les valeurs propres de A.
   Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable. 1
3. Déterminer une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1, telle que $A = P\,D\,P^{-1}$ et calculer P^{-1}. 4,5 (SEP) + 0,5 (P) + 1,5 (P^{-1})

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$ 9

On se propose de résoudre l'équation (1) : $M^2 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M\,P$. (La matrice P a été définie en **I.3.**)

1. Montrer : $M^2 = A \iff N^2 = D$. 2
2. Établir que, si $N^2 = D$, alors $N\,D = D\,N$. 1
3. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale. 2
4. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$. 2
5. En déduire la solution B de l'équation (1) dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. 2

Partie III : Intervention d'un polynôme 7

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$

2

2. En déduire : $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B$. (La matrice B a été définie en **II.5.**) 2
3. Montrer, pour toute matrice carrée F d'ordre trois : 3

$$A\,F = F\,A \iff B\,F = F\,B.$$

Exercice 2 24 points

Préliminaire (5)

On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$.
On considère l'application :

$$g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = x^2 + \ln x$$

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$ 1 + 1
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet une solution et une seule.

On note α l'unique solution de cette équation. 1,5

3. Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ 1,5

Partie A (11)

On note $I = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application :

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$$

1. a) Montrer que f est strictement croissante sur I. 2
   b) Montrer que $\dfrac{1}{2} < f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(1) < 1$. 1,5
   c) En déduire que $\forall x \in I, \quad f(x) \in I$. 1
2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Calculer u_1 0,5
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \in I$ 1,5
   c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. 2
   d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est le réel α. 2,5

Partie B (8)

On considère l'application :

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto F(x,y) = x\, e^y + y\, \ln x$$

1. a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. 1 + 1
   b) Montrer que F admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du réel α. 2
2. Est-ce que F admet un extremum local ? 1,5 (dérivées secondes) + 2,5

EML

EXERCICE 3 43 points

Dans tout l'exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on pose : $q = 1 - p$.
Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\big([X = k]\big) \; = \; q^k\, p \; = \; (1-p)^k\, p$$

PARTIE A 5

1. Montrer que la variable aléatoire $Y = X + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. 1,5

2. En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. 1,5

3. Informatique. On suppose importé le module `numpy.random` d'alias `rd`.
On rappelle que la fonction `rd.random()` renvoie un réel aléatoire entre 0 et 1.
Compléter la fonction Python suivante, prenant en entrée le réel p et renvoyant une simulation de la variable aléatoire X.

```
def simule_X(p):
    Y=...
    while ........... :
        Y=Y+1
    X=Y-1
    return X
```

2

PARTIE B 18

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- le joueur introduit un nombre k de jetons de son choix ($k \in \mathbb{N}$), puis il appuie sur un bouton pour activer la machine ;
- si k est égal à 0, alors la machine ne reverse aucun jeton au joueur ;
- si k est un entier supérieur ou égal à 1, alors la machine définit k variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$, toutes indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X étudiée dans la partie A, et reverse au joueur $(X_1 + \cdots + X_k)$ jetons ;
- les fonctionnements de la machine à chaque activation sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que du nombre de jetons introduits.

Le casino s'interroge sur la valeur à donner à p pour que la machine soit attractive pour le joueur, tout en étant rentable.
Le casino imagine alors le cas d'un joueur invétéré qui, avant chaque activation, **place l'intégralité de ses jetons** dans la machine, et continue de jouer encore et encore.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, Z_n la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après n activations de la machine.
On suppose que le joueur commence avec un seul jeton ; ainsi : $Z_0 = 1$.
On remarque en particulier que Z_1 suit la même loi que X.

4. Compléter la fonction Python suivante, prenant en entrée un entier $n \in \mathbb{N}$, un réel p, simulant l'expérience aléatoire et renvoyant la valeur de Z_n.
Cette fonction devra utiliser la fonction simule_X.

```
def simule_Z(n,p):
    Z=1
    for i in range(n):
        s=0
        for j in range(Z):
            ...............
        Z=.......
    return Z
```

2

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit la probabilité u_n que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine ; ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}([Z_n = 0])$.
On note également R l'événement : « le joueur finit par ne plus avoir de jeton ».

5. *a)* Préciser les valeurs de u_0 et de u_1. 1

   b) Comparer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les événements $[Z_n = 0]$ et $[Z_{n+1} = 0]$. 1
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente. 1

Dans la suite de l'exercice, on note : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. Justifier : $\mathbb{P}(R) = \ell$. 1,5

7. *a)* Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}([Z_2 = 0]) = (u_1)^k$.
   On **admet** que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}([Z_{n+1} = 0]) = (u_n)^k$. 2

   b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z_1 = k])\,(u_n)^k = \dfrac{p}{1 - q\,u_n}$. 2

8. *a)* Montrer que ℓ vérifie : $(\ell - 1)(q\,\ell - p) = 0$. 1,5

   b) On suppose : $p \geqslant \dfrac{1}{2}$. Démontrer : $\mathbb{P}(R) = 1$. 2

   c) On suppose : $p < \dfrac{1}{2}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \dfrac{p}{q}\right]$. En déduire : $\mathbb{P}(R) < 1$. 2 + 1

   d) Expliquer pourquoi le casino préfèrera choisir p dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. 1

PARTIE C (20)

On suppose à présent que $p \geqslant \frac{1}{2}$.

Le casino cherche la valeur à donner à p pour que le joueur joue le plus longtemps possible dans le casino et ainsi, dépense plus d'argent dans ses concommations au bar.

On note T la variable aléatoire égale au nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque, pour la première fois, celui-ci n'a plus de jeton.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 1 - u_n$.

9. Justifier : $\forall n \in N,\ u_n = \mathbb{P}([T \leqslant n])$ puis $\forall n \in N^*,\ \mathbb{P}([T = n]) = v_{n-1} - v_n$. 1,5 + 1,5

10. Montrer, pour tout $N \in N^*$: $\sum\limits_{n=1}^{N} n\mathbb{P}([T = n]) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N$. 2

11. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$

a) Montrer : $\forall n \in N,\ u_n = \dfrac{n}{n+1}$. 2,5

b) En déduire que la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance. 2

12. On suppose maintenant $p > \frac{1}{2}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \dfrac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{q}{p} w_n$. 2,5

b) En déduire : $\forall n \in N,\ u_n = \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$, puis : $\forall n \in N,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$. 2,5 + 1,5

c) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et que $E(T) \leqslant \dfrac{1}{1 - \frac{q}{p}}$. 3

13. Quelle(s) valeurs(s) de p recommanderiez-vous au casino ? 1