Correction DM9 cubes

Exercice :

1)a)$T_1(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(T_1 = k) = P\left(E_1 \cap \dots \cap E_{k-1} \cap \overline{E_k}\right)$

$$= P(E_1)P_{E_1}(E_2)\dots P_{E_1\cap\dots\cap E_{k-2}}(E_{k-1})P_{E_1\cap\dots\cap E_{k-1}}\left(\overline{E_k}\right) \qquad (*)$$

Or, $P\left(\overline{E_1}\right) = \dfrac{n}{\binom{2n}{2}}$ car sur les $\binom{2n}{2}$ paires possibles, il y a n paires bien appareillées.

Donc $P(E_1) = 1 - \dfrac{n}{\binom{2n}{2}}$.

Les k tirages se font dans les mêmes conditions, puisque les deux boules tirées sont remises dans l'urne à chaque fois.

Donc $P_{E_1}(E_2) = \dots = P_{E_1\cap\dots\cap E_{k-2}}(E_{k-1}) = 1 - \dfrac{n}{\binom{2n}{2}}$.

Enfin, $P_{E_1\cap\dots\cap E_{k-1}}\left(\overline{E_k}\right) = \dfrac{n}{\binom{2n}{2}}$.

En reportant dans $(*)$, on déduit :

$$P(T_1 = k) = \left(1 - \frac{n}{\binom{2n}{2}}\right)^{k-1} \frac{n}{\binom{2n}{2}} \quad \text{avec } \frac{n}{\binom{2n}{2}} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1).$$

D'où $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(T_1 = k) = \left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right)^{k-1} \dfrac{1}{2n-1}$.

Ainsi, $T_1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)$.

b)Le cours donne : $E(T_1) = \dfrac{1}{\frac{1}{2n-1}} = 2n-1$.

2)On pose $X_1 = T_1$ et pour tout $i \in [\![2, n]\!],\ X_i = T_i - T_{i-1}$.

a)X_i représente le nombre de tirages effectués entre l'obtention de la $(i-1)$-ème paire et la i-ème paire.

b)Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Cherchons la loi de T_i.
Après avoir obtenu la $(i-1)$-ème paire, il reste dans l'urne $n - (i-1) = n - i + 1$ paires de boules.
On est donc ramené à la loi de T_1 avec $n \to n - i + 1$.
Donc $X_i \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{1}{2(n-i+1)-1}\right)$, c'est-à-dire $X_i \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{1}{2n-2i+1}\right)$.
D'où $E(X_i) = 2n - 2i + 1$.

c)En sommant les égalités $X_i = T_i - T_{i-1}$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a :

$\displaystyle\sum_{i=2}^{n} X_i = \sum_{i=2}^{n} (T_i - T_{i-1}) = T_n - T_1$, par télescopage.

Donc $T_n = T_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i = X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

X_1, ..., X_n admettent une espérance. Donc T_n également.

De plus, $$\begin{aligned} E(T_n) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \quad \text{par linéarité} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (2n-2i+1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) \quad \text{en posant } j = n-i \\ &= n \times \frac{1+(2(n-1)+1)}{2} \\ &= n^2. \end{aligned}$$

✓ La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut : (nb termes)×(moyenne des termes extrêmes).

3)On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces n tirages.

a)$P(S_n = 0) = P(E_1 \cap ... \cap E_n)$.

En reprenant les calculs de la question 1)a), on trouve :

$P(S_n = 0) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^n$.

b)En passant en forme exponentielle, on a : $P(S_n = 0) = exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)\right)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{2n-1} = 0$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n-1}$.

Donc $n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{n}{2n-1} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{1}{2}$.

Puis, $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} e^x = e^{-\frac{1}{2}}$.

Par composée, $\lim\limits_{n \to +\infty} exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)\right) = e^{-\frac{1}{2}}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(S_n = 0) = e^{-\frac{1}{2}}$.

c)$$\begin{aligned}P(S_n = n) &= P\left(\overline{E_1} \cap \dots \cap \overline{E_n}\right)\\
&= P\left(\overline{E_1}\right) P_{\overline{E_1}}\left(\overline{E_2}\right) \dots P_{\overline{E_1}\cap\dots\cap\overline{E_{n-1}}}\left(\overline{E_n}\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2n-2i+1}\\
&= \frac{1}{2n-1} \times \frac{1}{2n-3} \times \dots \times \frac{1}{1}\\
&= \frac{1}{1\times 3\times \dots \times (2n-1)}\\
&= \frac{2\times 4\times \dots \times (2n)}{(2n)!}\\
&= \frac{n!2^n}{(2n)!}.\end{aligned}$$