Chapitre 13 : variables aléatoires discrètes

I)Variable aléatoire

Déf : on appelle variable aléatoire toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que pour tout x réel, $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\} \in \mathscr{A}$.

L'événement $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\}$ est noté $(X \leq x)$.

On définit de même les événements $(X < x)$, $(X \geq x)$, $(X > x)$, $(X = x)$ et plus généralement $(X \in I)$ où I est un intervalle de $\mathbf{R}$.

Propriété 1 (combinaison linéaire et produit)
Soient X et Y des variables aléatoires et soient α et β des réels.
Les applications ci-dessous sont des variables aléatoires :

$$\alpha X + \beta Y : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \\ \omega \mapsto \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega) \end{array} \quad \text{et} \quad XY : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \\ \omega \mapsto \alpha X(\omega) Y(\omega) \end{array}$$

Déf : on dit que X est discrète finie si $X(\Omega)$ est fini.

Déf : on dit que X est discrète infinie si $X(\Omega)$ est une partie infinie de $\mathbf{Z}$.

II)Loi d'une variable aléatoire discrète

Déf : soit X une variable aléatoire discrète.
On appelle loi de X, la donnée de tous les couples $\big(x, P(X = x)\big)$ où x décrit $X(\Omega)$.

Propriété 2
Pour toute variable aléatoire discrète, on a : $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.

<u>Exercice 1</u>
Dans une urne contenant 2 boules blanches et 5 boules rouges, on tire 3 boules, une par une, sans remise.
Déterminer la loi de X définie par $X =$ nombre de blanches tirées.

III)Fonction d'une variable aléatoire discrète

Déf : soit X une variable aléatoire discrète et soit $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $X(\Omega) \subset I$.
L'application goX est une variable aléatoire discrète, notée $g(X)$. Elle est définie de façon naturelle par $\forall \omega \in \Omega,\ (goX)(\omega) = g(X(\omega))$.

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "goX"'] & X(\omega) \arrow[d, "g"] \\ & g(X(\omega)) \end{tikzcd}$$

<u>Exercice 2</u>

Soit X une variable aléatoire de loi donnée par :

x	-1	0	1
$P(X=x)$	$1/10$	$3/10$	$6/10$

Déterminer la loi de $Y = X^2 + 3$.

IV)Espérance d'une variable aléatoire discrète

Déf : soit X une variable aléatoire discrète.
On dit que X admet une espérance si $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} xP(X=x)$ converge absolument.

On appelle alors espérance de X, le nombre réel, noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x).$$

✓ Si X est discrète finie, il n'y a pas de problème d'existence de $E(X)$ puisque la somme est finie.

<u>Exercice 3</u>

Calculer l'espérance de la variable aléatoire X de loi donnée par :

x	-1	2	3
$P(X=x)$	$1/3$	$1/2$	$1/6$

<u>Exercice 4</u>

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et $\forall k \in \mathbf{N},\ P(X=k) = e^{-2}\dfrac{2^k}{k!}$.
Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Théorème 1 (théorème de transfert)
Soit $g : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $X(\Omega) \subset I$.
La variable aléatoire discrète $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X=x)$ est absolument convergente, et on a alors :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X=x).$$

Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $g(X)$ sans avoir à déterminer la loi de $g(X)$, la simple connaissance de la loi de X étant suffisante.

$$\begin{tikzcd}
\textit{loi de } X \arrow[r] \arrow[dr, "\textit{Théorème de transfert}"] & \textit{loi de } g(X) \arrow[d] \\
 & E(g(X))
\end{tikzcd}$$

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire de loi donnée par :

x	1	2	4
$P(X=x)$	1/4	1/2	1/4

Montrer que $Y=\sqrt{X}$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire de loi donné par $X(\Omega)=\mathbf{N}^*$ et $\forall k\in\mathbf{N}^*$:
$P(X=k)=\dfrac{1}{2^k}$.

Montrer que $Y=e^{-X}$ admet une espérance et la calculer.

Propriété 3

Soit X une variable aléatoire discrète.
Si X admet une espérance, alors pour tous a et b réels, $aX+b$ admet une espérance et $E(aX+b)=aE(X)+b$.

Théorème 2 (linéarité de l'espérance)

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes admettant une espérance.
1) $X+Y$ admet une espérance et $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.
2) Pour tout a réel, aX admet une espérance et $E(aX)=aE(X)$.

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire discrète.
Si l'événement $(X\geq 0)$ est quasi-certain, alors $E(X)\geq 0$.

Déf : soit X une variable aléatoire discrète.
On dit que X est centrée si X admet une espérance et si $E(X)=0$.

✓ Si X admet une espérance, la variable aléatoire $X-E(X)$ est centrée.

V)Variance d'une variable aléatoire discrète

Déf : soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance.
On dit que X admet une variance si $\sum\limits_{x\in X(\Omega)}(x-E(X))^2P(X=x)$ converge.

On appelle alors variance de X, le nombre réel positif, noté $V(X)$ défini par :

$$V(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}(x-E(X))^2P(X=x).$$

✓ Si X est discrète finie, pas de problème d'existence.

Déf : soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance.
On appelle écart-type de X, le nombre réel, noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}.$$

Théorème 3 (formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire discrète X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance. De plus, on a :

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2.$$

Exercice 7

Calculer de deux façons différentes la variance de la variable aléatoire X de loi donnée par :

x	-1	2	3
$P(X=x)$	$1/3$	$1/2$	$1/6$

Exercice 8

Soient p et q des réels tels que $0 < p < 1$ et $p + q = 1$.
Soit X de loi donnée par $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(X = k) = q^{k-1}p$.
Montrer que X admet une espérance et une variance. En donner la valeur.

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance.
Alors pour tous a et b réels, $aX + b$ admet une variance.
De plus, $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Déf : on dit que X est réduite si X admet une variance et si $V(X) = 1$.

✓ La variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

VI)Lois discrètes usuelles

loi	*notation*	*parametre*	$X(\Omega)$	*formule*	*esperance*	*variance*
certaine	*aucune*	*aucun*	$\{a\}$	$P(X=a)=1$	a	0
uniforme	$\mathscr{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$	*aucun*	$\llbracket 1,n\rrbracket$	$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Bernoulli	$\mathscr{B}(p)$	p	$\llbracket 0,1\rrbracket$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=q$ *avec* $q=1-p$	p	pq
binomiale	$\mathscr{B}(n,p)$	n *et* p	$\llbracket 0,n\rrbracket$	$P(X=k)=\dbinom{n}{k}p^kq^{n-k}$ *avec* $q=1-p$	np	npq
geometrique	$\mathscr{G}(p)$	p	$\mathbf{N}^*$	$P(X=k)=q^{k-1}p$ *avec* $q=1-p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
Poisson	$\mathscr{P}(\lambda)$	λ	$\mathbf{N}$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Déf : on appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p, toute expérience aléatoire amenant deux issues :
− le succès de probabilité p
− l'échec de probabilité $q = 1 - p$.

Déf : on appelle schéma de Bernoulli de paramètre p toute expérience aléatoire formée d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
On appelle schéma de Bernoulli de paramètres n et p toute expérience aléatoire formée de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Propriété 6 (caractérisation de la loi binômiale)
La variable aléatoire X comptant le nombre de succès obtenus lors d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Propriété 7 (caractérisation de la loi géométrique)
La variable aléatoire X égale au rang d'apparition du premier succès obtenu lors d'un schéma de Bernoulli de paramètre p suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

<u>Exercice 9</u>
Une urne contient 2 boules blanches, 1 boule rouge et 1 boule verte.
On tire dans cette urne les boules une par une sans remise jusqu'à l'obtention de la boule rouge.
Soit X=rang d'obtention de la rouge.
1)Déterminer la loi de X. 2)Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

<u>Exercice 10</u>
Une urne contient 2 boules blanches, 1 boule rouge et 1 boule verte.
On tire dans cette urne 1 boule.
Soit X=nombre de boules rouges tirées.
1)Reconnaître la loi de X. 2)Préciser $E(X)$ et $V(X)$.

<u>Exercice 11</u>
Une urne contient 2 boules blanches, 1 boule rouge et 1 boule verte.
On tire dans cette urne 3 boules une par une avec remise.
Soit X=nombre de boules rouges tirées.
1)Reconnaître la loi de X. 2)Préciser $E(X)$ et $V(X)$.

<u>Exercice 12</u>
Une urne contient 2 boules blanches, 1 boule rouge et 1 boule verte.
On tire des boules une par une avec remise jusqu'à l'obtention de la boule rouge.
Soit X=rang d'obtention de la boule rouge.
1)Reconnaître la loi de X. 2)Préciser $E(X)$ et $V(X)$.

<u>Exercice 13</u>
Une urne contient 4 boules rouges.
On tire 3 boules avec ou sans remise.
Soit X=nombre de boules rouges tirées.
1)Reconnaître la loi de X. 2)Préciser $E(X)$ et $V(X)$.