DS4 - ecg2 - maths appliquées
mercredi 7/2/2024

Problème 1

Partie A (étude d'une première fonction)

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x>0,\ g(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

1)a)Justifier que g est dérivable sur $]0,+\infty[$. Calculer $g'(x)$ pour tout $x>0$.

b)Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

c)Dresser le tableau de variations de g.

2)a)Justifier que g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et que

$$\forall x>0,\ g''(x)=\frac{-3+2\ln x}{x^3}.$$

b)Etudier la convexité de g. Justifier que $\mathscr{C}_g$ possède un unique point d'inflexion I dont on précisera l'abscisse.

c)Tracer $\mathscr{C}_g$ et la tangente T à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1, ainsi que tous les éléments qui vous paraissent utiles.
On donne : $e\approx 2,7 \qquad \frac{1}{e}\approx 0,4 \qquad e^{\frac{3}{2}}\approx 4,5.$

Partie B (étude d'une deuxième fonction)

Soit φ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par

$$\forall x\geq 1,\ \varphi(x)=\sqrt{\ln x}.$$

3)Justifier que φ est continue et croissante sur $[1,+\infty[$.

4)Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x-1}$, puis interpréter le résultat obtenu.

5)Tracer $\mathscr{C}_\varphi$ et sa tangente au point d'abscisse 1, ainsi que tous les éléments qui vous paraissent utiles.

Partie C (étude d'une famille de fonctions)

Pour tout réel c, on note h_c la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0,\ h_c(x) = \ln x - cx.$$

L'objectif est d'étudier le comportement de h_c suivant les valeurs de c.

6)Calculer $h_c'(x)$ pour tout $x > 0$ et préciser $\lim\limits_{x\to 0^+} h_c(x)$.

7)On suppose dans cette question que $c \leq 0$.

a)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h_c(x)$.

b)Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha_c > 0$ (dépendant de c) tel que $h_c(\alpha_c) = 0$, puis justifier que $0 < \alpha_c \leq 1$.

c)Etudier le signe de $h_c(x)$ suivant les valeurs de x.

8)On suppose dans cette question que $c > 0$.

a)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h_c(x)$.

b)Dresser le tableau de variations de h_c.

c)Justifier que si $c > \dfrac{1}{e}$, on a : $\forall x > 0,\ h_c(x) < 0$.

d)On suppose enfin que $0 < c < \dfrac{1}{e}$.

d1)Justifier que l'équation $h_c(x) = 0$ admet exactement deux solutions β_c et γ_c, vérifiant $1 < \beta_c < e < \gamma_c$.

d2)Etudier le signe de $h_c(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie D (étude d'une fonction de deux variables)

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U =]0,+\infty[\times\mathbf{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = g(x) - \frac{y^2}{x} = \frac{\ln x}{x} - \frac{y^2}{x}.$$

9)Représenter l'ouvert U.

10)Justifier soigneusement que f est de classe C^2 sur U, puis calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

11)a)Montrer que f admet sur U un unique point critique.

b)Montrer qu'en ce point, f possède un extrémum local dont on précisera la nature.

c)A l'aide de la partie A, montrer que cet extrémum est global.

12)Pour cette question, on pourra s'aider des parties B et C.
Pour tout réel c, on note L_c la ligne de niveau c de f.
On rappelle que $L_c = \{(x,y) \in U \mid f(x,y) = c\}$.

a)Vérifier que $\forall (x,y) \in U,\ (x,y) \in L_c \iff y^2 = h_c(x)$.

b)Que dire de L_c quand $c > \dfrac{1}{e}$?

c)Tracer sur un même graphique les courbes de niveau L_{-2}, L_0 et $L_{1/4}$.

Partie E (étude d'une famille d'intégrales)

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $p \in \mathbf{N}$, on pose :

$$I_{n,p} = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n} dx.$$

13)a)Justifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ divergent.

b)Quelle est la nature des intégrales $I_{1,p}$ lorsque $p \geq 2$?

14)On suppose dans cette question que $n \geq 2$ et $p \in \mathbf{N}$.

a)Montrer que $I_{n,p}$ converge.

b)Calculer $I_{n,0}$ en fonction de n.

c)A l'aide d'une intégration par parties effectuée sur le segment $[1, A]$ avec $A \geq 1$, calculer :

$$I_{2,1} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

d)Soit $A \geq 1$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que

$$\forall n \geq 2, \forall p \geq 1,\ \int_1^A \frac{(\ln x)^p}{x^n} dx = \frac{(\ln A)^p}{(-n+1)A^{n-1}} + \frac{p}{n-1} \int_1^A \frac{(\ln x)^{p-1}}{x^n} dx.$$

e)En déduire l'égalité

$$\forall n \geq 2, \forall p \geq 1,\ I_{n,p} = \frac{p}{n-1} I_{n,p-1}.$$

f)Montrer par récurrence sur p que

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall n \geq 2,\ I_{n,p} = \frac{p!}{(n-1)^{p+1}}.$$

Problème 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.

$\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on note ${}^tM$ sa matrice transposée.

On rappelle les points suivants :

$M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est symétrique $\iff {}^tM = M$

L'application $M \mapsto {}^tM$ est linéaire

Pour toutes matrices M et N de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:

$$^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$$

$$^t\left(M^{-1}\right) = \left({}^tM\right)^{-1}$$

$$^t\left({}^tM\right) = M$$

.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ fixée. on considère l'application f_A définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ f_A(M) = A\,{}^tM + M\,{}^tA.$$

Partie A (étude du cas général)

1)Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

2)Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

3)a)Montrer que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\ f_A(M) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

b)Comparer (au sens de l'inclusion) Imf_A et $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

c)f_A est-elle bijective ?

4)On suppose dans cette question que A est inversible.

a)Soit $N \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

Calculer $f_A\left(\frac{1}{2}N\,{}^t\left(A^{-1}\right)\right)$ *(résultat simple, après simplifications ...)*

b)Conclure que $Imf_A = \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$.

5)Trouver un exemple de matrice A où l'égalité 4)b) est fausse.

Partie B (étude d'un exemple)

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 2$ et on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour simplifier, on note $f = f_A$.

6)a)Préciser les valeurs propres de A, puis déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.

b)A est-elle diagonalisable ?

7)a)Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Calculer la matrice $f(M)$.

b)Déterminer une base de $Ker f$, puis sa dimension.

c)En déduire la dimension de $Im f$, puis celle de $\mathscr{S}_2(\mathbf{R})$.

8)On considère la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)Montrer que la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

b)Déterminer les valeurs propres de F, ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre de F.

c)Justifier que F n'est pas diagonalisable.

9)On considère le système différentiel :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2y \\ \\ y' = -y \end{array} \right.$$

où x et y sont des fonctions inconnues de la variable t.

a)A l'aide de la question 6), déterminer les solutions de (S).

b)Montrer que $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre de (S). Est-il asymptotiquement stable ?

c)On considère les trajectoires suivantes :
$T_1 = \left\{(e^t, 0),\ t \in \mathbf{R}\right\}$,
$T_2 = \left\{(e^{-t}, -e^{-t}),\ t \in \mathbf{R}\right\}$,
$T_3 = \left\{e^t + e^{-t}, -e^{-t}),\ t \in \mathbf{R}\right\}$.

c1)Deux d'entre elles sont des demi-droites. Lesquelles ?

c2)Tracer sur un même graphique l'allure de T_1, T_2 et T_3.

Partie C (informatique)

Effectuer le *quart de tour* d'une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ quelconque, consiste à la faire tourner d'un quart de tour **dans le sens des aiguilles d'une montre**.

Prenons par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Après un quart de tour, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ devient $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Effectuer la *rotation* d'une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ quelconque, consiste à la faire tourner d'un certain nombre de quarts de tour.

1)La fonction `quart` ci-dessous prend en paramètre $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ quelconque et renvoie la matrice obtenue par quart de tour. La compléter.

```
def quart(A):
    a=A[0,0]
    b=A[0,1]
    c=A[1,1]
    d=A[1,0]
    A=np.array(([...,...],[...,...]))
    return ...
```

2)En utilisant la fonction `quart`, écrire une fonction `rotation` de paramètres $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et $q \in \mathbf{N}^*$, renvoyant la matrice obtenue après avoir fait tourner A d'un nombre q de quart de tours.

3)La fonction `jeu1` ci-dessous prenant en paramètre une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ quelconque renvoie une liste et un entier.

```
def jeu1(A):
    c=0
    q=0
    Aux=A
    manivelle=[]
    for k in range(10):
        q=q+rd.randint(1,5)
        manivelle.append(q)
        Aux=rotation(Aux,q)
        if np.array_equal(A,Aux)==True:
            c=c+1
    return manivelle,c
```

a)Expliquer ce que représentent la liste `manivelle` et le réel c renvoyés par la fonction.

b)On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

La fonction `jeu1` retourne : manivelle=[1, 4, 8, 10, 14, 15, 19, 22, 25, 26].

Quelle valeur de c retourne t-elle ? Justifier.

c)On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La fonction `jeu1` retourne : manivelle=[1, 3, 6, 10, 13, 14, 18, 19, 20, 22].

Quelle valeur de c retourne t-elle ? Justifier.

4)La fonction `jeu2` ci-dessous prend en paramètre une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ quelconque et renvoie un entier.

```
def jeu2(A):
    Aux=A
    mystere=[ ]
    for k in range(1,101):
        Aux=rotation(Aux,k)
        if np.array_equal(A,Aux)==True:
            mystere.append(k)
    return mystere[6]
```

a)Après k passages dans la boucle, de combien de quart de tours, la matrice A a t-elle tourné ? (on exprimera ce nombre en fonction de k).

b)On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Quelle valeur est renvoyée par la fonction `jeu2` ?

Rappels de python

Listes

Soit `L` une liste.

• La commande `L.append(x)` inclut l'élément `x` à la fin de la liste `L`.

• Pour tout entier `i` positif ou nul, `L[i]` désigne l'élément d'indice `i` de la liste `L` (les indices commencent à zéro).

Le module numpy

On suppose le module importé sous la forme :

```
import numpy as np
```

• Une matrice A est un objet de type `array`.

$A[i, j]$ est le coefficient de la ligne i et la colonne j de A (les indices commençant à zéro).

• La fonction `np.array_equal()` prend en paramètres deux matrices X et Y et renvoie la valeur `True` si X et Y sont égales.

Le module numpy.random

On suppose le module importé sous la forme :

```
import numpy.random as rd
```

La fonction `rd.randint` prend en entrée deux entiers a et b (avec $a < b$) et renvoie un entier aléatoire entre a et $b - 1$.