Correction TP7 Python

Exercice 1

1)Les solutions de (E_0) sont les fonctions $t \mapsto \beta e^{-t}$.

2)$t \mapsto t-1$ est une solution particulière de (E).

3)Les solutions de (E) sont les fonctions $y : t \mapsto \beta e^{-t} + t - 1$.

4) $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\beta e^{-t} + t - 1\right) = +\infty$.

Les trajectoires de (E) sont donc divergentes.

5)Le programme affiche la courbe représentative sur $[0,4]$ de la solution h de (E) telle que $h(0) = 5$. On sait que cette solution est unique d'après la propriété de Cauchy.
h est de la forme $h : t \mapsto \beta e^{-t} + t - 1$ grâce à 3).
Et la condition $h(0) = 5$ se traduit par $\beta e^{-0} + 0 - 1 = 5$ d'où $\beta = 6$.
Donc $h : t \mapsto 6e^{-t} + t - 1$.

Exercice 2

1)Les solutions de (E_0) sont les fonctions $t \mapsto \beta e^{t}$.

2)$t \mapsto -1$ est une solution particulière de (E).

3)Les solutions de (E) sont les fonctions $y : t \mapsto \beta e^{t} - 1$.

4)a)Pour chacune des valeurs de $y_a \in [\![-5,5]\!]$, Python dessine la trajectoire de la solution y de (E) vérifiant $y(0) = y_a$, ce qui donne 11 trajectoires.

b)La propriété de Cauchy assure qu'il existe une unique solution de (E) vérifiant $y(a) = y_a$ (ici $a = 0$).
Autrement dit, par un point donné ne passe qu'une seule trajectoire. Les trajectoires sont donc disjointes. (elles ne se coupent pas).

c)Une trajectoire d'équilibre est la trajectoire d'une fonction constante solution de (E). Graphiquement, on voit que c'est la fonction $t \mapsto -1$.
C'est la seule car $y : t \mapsto c$ est solution de $(E) \iff \forall t \in \mathbf{R},\ c' - c = 1$
$\iff 0 - c = 1 \iff c = -1$.

✓ -1 est donc le seul point d'équilibre de (E).

Exercice 3

1)L'égalité $N(t+\Delta t) = N(t) + r\Delta t N(t)$ donne : $\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = rN(t)$.

Pour t fixé et Δt tendant vers 0, on a :

$\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = rN(t)$, c'est-à-dire $N'(t) = rN(t)$.

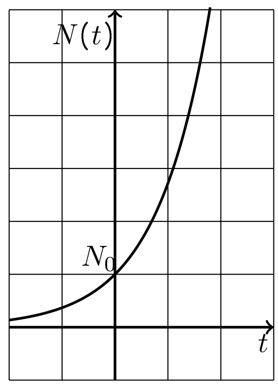
Donc N est solution de l'équation différentielle $y' = ry$.

2)Les solutions de l'équation différentielle $y' = ry$ sont $t \mapsto \beta e^{rt}$ où $\beta \in \mathbf{R}$.

La condition initiale imposée donne alors $\forall t \in \mathbf{R},\ N(t) = N_0 e^{rt}$.

3)Comme $r > 0$ et $N_0 > 0$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = +\infty$.

4)



Le modèle de Malthus entraîne une croissance exponentielle de la population, ce qui est critiquable car les ressources du milieu sont finies.

Exercice 4

1)L'égalité $N(t+\Delta t) = N(t) + r\Delta t \dfrac{K - N(t)}{K} N(t)$ donne :

$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = r\dfrac{K - N(t)}{K}N(t)$.

Pour t fixé et Δt tendant vers 0, on a : $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = r\dfrac{K - N(t)}{K}N(t)$,

c'est-à-dire : $N'(t) = r\dfrac{K - N(t)}{K}N(t)$, soit $N'(t) = rN(t) - \dfrac{rN(t)^2}{K}$.

Donc N est solution de (E).

2)Pour tout réel c, la fonction $t \mapsto c$ est solution de (E)

$\iff 0 = rc - \frac{rc^2}{K} \iff rc\left(1 - \frac{c}{K}\right) = 0 \iff c = 0$ ou $c = K$.

Les points d'équilibre sont donc 0 et K.

3)a)On a $\forall t \in \mathbf{R},\ N(t) = \dfrac{K}{1 + \lambda e^{-rt}}$.

$N(0) = N_0 \iff N_0 = \dfrac{K}{1+\lambda} \iff (1+\lambda)N_0 = K \iff \lambda = \dfrac{K - N_0}{N_0}$.

b)On a $\forall t \in \mathbf{R},\ N(t) = \dfrac{K}{1 + \frac{K-N_0}{N_0}e^{-rt}}$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-rt} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = K$.

On a $\forall t \in \mathbf{R},\ N'(t) = r\dfrac{K - N(t)}{K}N(t)$ et $0 \leq N(t) \leq k$ donc $N'(t) \geq 0$.

Donc N est croissante.

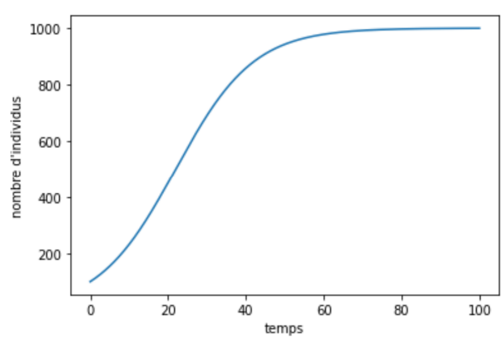
c)En dérivant l'égalité $N'(t) = rN(t) - \dfrac{rN(t)^2}{K}$, on obtient :

$N''(t) = rN'(t) - \dfrac{2rN(t)N'(t)}{K}$.

$$\begin{aligned}
N''(t) \geq 0 &\iff rN'(t) - \frac{2rN(t)N'(t)}{K} \geq 0 \\
&\iff rN'(t)\left(1 - \frac{2N(t)}{K}\right) \geq 0 \\
&\iff 1 - \frac{2N(t)}{K} \geq 0 \\
&\iff N(t) \leq \frac{K}{2} \\
&\iff \frac{K}{1 + \frac{K-N_0}{N_0}e^{-rt}} \leq \frac{K}{2} \\
&\iff 1 + \frac{K - N_0}{N_0}e^{-rt} \geq 2 \\
&\iff \frac{K - N_0}{N_0} \geq e^{rt} \\
&\iff t \leq \frac{1}{r}\ln\left(\frac{K - N_0}{N_0}\right).
\end{aligned}$$

Donc N est convexe sur $\left]-\infty, \frac{1}{r}\ln\left(\frac{K-N_0}{N_0}\right)\right]$, puis concave sur $\left[\frac{1}{r}\ln\left(\frac{K-N_0}{N_0}\right), +\infty\right[$, avec un point d'inflexion en $\frac{1}{r}\ln\left(\frac{K-N_0}{N_0}\right)$.

4)Le programme affiche la solution N de (E) telle que $N(0) = N_0$.
Ci-dessous, $N_0 = 100$, $r = 0.1$ et $K = 1000$.



La population croît exponentiellement, puis ralentit sa progression en tendant vers une valeur limite $K = 1000$.

Exercice 5

1)a)Le système s'écrit : $\left\{\begin{array}{l} x' = ax \\ y' = -cy \end{array}\right.$

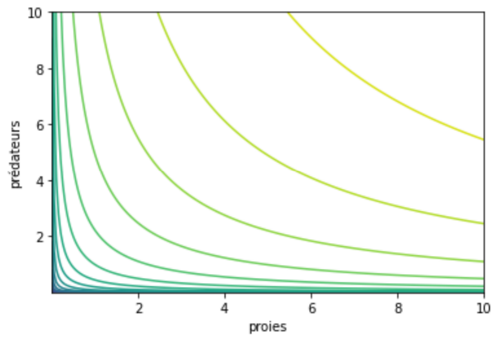
C'est un système diagonal qu'on peut résoudre directement.

On a : $x(t) = \beta e^{at}$ et $y(t) = \gamma e^{-ct}$ où $(\beta, \gamma) \in \mathbf{R}^2$.

b) $\forall t \in \mathbf{R},\ y(t) = \gamma e^{-ct} = \gamma \left(e^{at}\right)^{-c/a} = \gamma \left(\dfrac{x(t)}{\beta}\right)^{-c/a} = \dfrac{\gamma \beta^{c/a}}{x(t)^{c/a}} = \dfrac{K}{x(t)^{c/a}}$.

Donc les trajectoires sont les courbes d'équation $y = \frac{K}{x^{c/a}}$ avec $K > 0$.

c)Au fil du temps, le nombre de proies augmente, tandis que le nombre de prédateurs diminue.



2)Les points d'équilibre sont les couples de solutions de (S) formées de fonctions constantes. On trouve ces couples (x, y) en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} 0 & = ax - bxy \\ 0 & = -cy + dxy \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x(a - by) & = 0 \\ y(-c + dx) & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x = 0 \text{ ou } y = \frac{a}{b} \\ \text{et} \\ y = 0 \text{ ou } x = \frac{c}{d} \end{array}\right.$$

Les points d'équilibre sont donc $(0, 0)$ et $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

3)a)Soit $h : t \mapsto F\big((x(t), y(t)\big) = a \ln y(t) + c \ln x(t) - by(t) - dx(t)$.

h est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme et composée de fonction dérivables et :

$$\begin{aligned} h' &= a\frac{y'}{y} + c\frac{x'}{x} - by' - dx' \\ &= a\frac{-cy + dxy}{y} + c\frac{ax - bxy}{x} - b\big(-cy + dxy\big) - d\big(ax - bxy\big) \\ &= -ac + adx + ac - bcy + bcy - bdxy - dax + dbxy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc h est constante.

b)On observe que les trajectoires sont des courbes fermées.

L'augmentation du nombre de prédateurs fait diminuer le nombre de proies, jusqu'à ce que le nombre de prédateurs diminue (du fait du manque de proies), etc...puis on recommence le cycle.