
DS1 cubes ecg2 - maths appliquées

25/09/2024

Exercice 1-2

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que les valeurs propres λ de A sont les solutions de l'équation :

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0.$$

- (b) Etudier la fonction $f : x \mapsto x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variations.

On précisera les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbf{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbf{R}$.

On ne cherchera ni à calculer m , ni à calculer M .

- (c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M .
(d) Montrer que A admet trois valeurs propres, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
(e) En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$,

avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire qui vérifient : $AM = MA$.

- (a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont des matrices diagonales.
(b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
i. $M \in E$
ii. $P^{-1}MP$ commute avec D
(c) Etablir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

- (d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et donner sa dimension.
(e) Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A , qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A qui soit de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que (I, A, A^2) est une base de E .

Exercice 3

On considère les matrices d'ordre 3 suivantes :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note f l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ associe la matrice :

$$f(M) = HMG - GMH$$

Partie A :

- 1) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
- 2) Calculer les matrices $D = P^{-1}GP$ et $\Delta = P^{-1}HP$, puis vérifier qu'elles sont diagonales.
- 3) Calculer H^2 , HG et GH .
- 4) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}^*, H^n G = GH^n$.

Partie B :

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
- 2) Montrer à l'aide de la partie A que les matrices I , H et H^2 appartiennent à $\text{Ker } f$ puis conclure que $\text{Vect}(I, H, H^2) \subset \text{Ker } f$.
- 3) Montrer que la famille (I, H, H^2) est liée puis conclure que $\dim(\text{Ker } f) \geq 2$.

Partie C :

- 1) Montrer que $M \in \text{Ker } f \iff \Delta P^{-1}MPD = DP^{-1}MP\Delta$.
- 2) Soit X une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

$$\text{Montrer que } \Delta XD = DX\Delta \iff X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3.$$

- 3) Dédire des questions C1 et C2 :

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha - \gamma \\ -\alpha + \beta & \alpha & \alpha - \beta \\ -\alpha - \beta + 2\gamma & \alpha - \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 \right\}.$$

- 4) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ puis donner la dimension de $\text{Ker } f$.

Exercice 4

1) Montrer que $\forall x > 0, x - \ln x > 0$.

2) On définit alors la fonction f sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

c) Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

d) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

e) Dresser le tableau de variations de f .

f) On donne $e \approx 2,7$.

Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ ainsi que tous les éléments qui vous paraissent utiles.