74% = $\frac{20}{20}$ CONCOURS BLANC ECRICOME 92 points

Exercice 1 37 points

Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice et la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I 12

1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? 1
Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F. 1+0,5

2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? 1,5
Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G.

3. Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $A \in F \cap G$. 0,5 + 1

b) En déduire un polynôme annulateur de A. 0,5

c) Déterminer les valeurs propres de A, et donner une base de chaque sous-espace propre associé. 4

d) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? 1+1

Partie II 15

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. a) Démontrer :

$$M \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b\,(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

1

b) Montrer alors : $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$. 3

5. On note $B = I_3 - A$. Démontrer que (A, B) est une base de F. 1,5

6. a) On note $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$. Vérifier :

$$M = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$$

1

b) Calculer AB et BA. 1

c) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$M^n = \alpha^n \cdot A + \beta^n \cdot B$$

2,5

7. a) Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. 3

b) Si α et β sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$M^{-n} = \alpha^{-n} \cdot A + \beta^{-n} \cdot B$$

2

Partie III 10

Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = TX_n + Y$$

8. Calculer la matrice $I_3 - T$ et exprimer cette matrice en fonction de A et B. 0,5 + 1

9. À l'aide de la question 7, calculer la matrice $(I_3 - T)^{-1}$. 2

10. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne L, que l'on déterminera, telle que : 2

$$L = TL + Y$$

11. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$, puis : 1

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n - L = T^n(X_0 - L)$$ 2

12. Pour tout entier naturel n, exprimer X_n en fonction de A, B, L, X_0 et n. 1,5

EXERCICE 2 31 points

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad f(x,y) = xy + (\ln x)(\ln y).$$

PARTIE I. Etude des zéros de φ. 21

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. 1
2. Prouver que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$. 1,5
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée. 0,5 + 1
4. Montrer que φ est dérivable en 0 et préciser $\varphi'(0)$. 1,5
5. Dresser le tableau de variations de φ 2
6. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer l'existence d'un unique réel α tel que : $\varphi(\alpha) = 0$ et justifier que $\sqrt{2} < \alpha < 2$. 2 + 2
7. Etablir la convergence de l'intégrale $I = \int_0^\alpha \varphi(x)\,dx$ et vérifier que $I = \dfrac{\alpha(6+\alpha^2)}{9}$. 0,5 + 4
8. On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

   $a_0 = \sqrt{2}$ et $b_0 = 2$,

   $\forall n \in \mathbb{N}$, si $\varphi(a_n)\varphi\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$

   $\forall n \in \mathbb{N}$, si $\varphi(a_n)\varphi\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0$ alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$

   a)Ecrire une fonction Python d'en tête **def phi(x):** prenant en paramètre un réel $x > 0$ et retournant la valeur de $\varphi(x)$. 1

   b)A l'aide de cette fonction, écrire un programme Python affichant a_7 et b_7. 4

PARTIE II. Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ 10

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ 1
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\alpha}\right)$ est l'unique point critique de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ 1 + 3
3. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et établir que pour tous réels x et y strictement positifs

   $$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$

   $$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = 1 + \frac{1}{xy}$$

   $$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

   2
4. La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$? Si oui, en donner la nature (maximum ou minimum) 3

EXERCICE 3 24 points

PARTIE I. Un jeu en ligne. 7

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.
Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

- H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
- D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases. 1
2. Déterminer les probabilités $\mathrm{P}(H)$, $\mathrm{P}(V)$, $\mathrm{P}(D)$ des événements H, V, D. 1,5
3. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à :

$$\mathrm{P}(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048$$ 1

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.
   a) Pour chaque entier naturel i non nul, on note Z_i le gain de la société à la $i^{ème}$ relance. Calculer l'espérance mathématique $E(Z_i)$ de Z_i. 2
   b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ? 1,5

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés. 9

1. Un Joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
   a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées. 1,5
   b) Indiquer l'espérance et la variance de X. 1
   c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X. 1
2. Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure à 50% ? (On admettra que $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \simeq -0,1$ et $\ln(2) \simeq 0,7$) 2
3. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.
   a) Donner la loi de la variable aléatoire Y. 1,5
   b) Indiquer l'espérance et la variance de Y. 1
   c) Pour tout entier naturel k, montrer que la probabilité p_k que le joueur joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois, est donnée par la formule :

$$p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$$ 1

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu. 8

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée »et on pose $\mathrm{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_{\Delta}(H)$, $\mathrm{P}_{\Delta}(V)$, $\mathrm{P}_{\Delta}(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ. 2
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ pour en déduire que la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à :

$$\mathrm{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$$ 2

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance de gain soit positive. 2
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ? 2