Exercice 1 (eml 2016)

Partie I :

1)$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2)Pour tous réels a, b et c, on a :

$aI + bA + cA^2 = 0$

$\iff a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} a+c & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ a+2c & = & 0 \end{cases}$

$\iff a = b = c = 0.$

Donc la famille (I, A, A^2) est libre.

3)a)A est symétrique donc diagonalisable.

b)Cherchons les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

• $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ L_2 \longleftrightarrow L_1 \\ L_3 \end{array}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \longleftarrow \lambda L_1 + L_2 \\ L_3 \end{array}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \longleftrightarrow L_3 \\ L_3 \longleftrightarrow L_2 \end{array}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \longleftarrow (1-\lambda^2)L_2 - L_3 \end{array}$

avec $P(\lambda) = -\lambda(1-\lambda^2) - \lambda = -\lambda(2-\lambda^2)$.

λ est valeur propre de $A \iff A - \lambda I$ n'est pas inversible $\iff P(\lambda) = 0$.

Or, $P(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$ ou $\lambda^2 = 2 \iff \lambda = 0$ ou $\lambda = \sqrt{2}$ ou $\lambda = -\sqrt{2}$.

Ainsi, $sp(A) = \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$.

• $E_{-\sqrt{2}}(A) = \left\{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A+\sqrt{2}I)U = 0\right\}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A+\sqrt{2}I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} \sqrt{2}x + y & = & 0 \\ x + \sqrt{2}y + z & = & 0 \\ y + \sqrt{2}z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = -\sqrt{2}z \end{array} \right.$$

Donc $E_{-\sqrt{2}}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \text{ et } y = -\sqrt{2}z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -\sqrt{2}z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\}$.

D'où $E_{-\sqrt{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

• $E_{\sqrt{2}}(A) = \left\{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A-\sqrt{2}I)U = 0\right\}$.

En reprenant le calcul précédent avec $\sqrt{2} \to -\sqrt{2}$, on obtient :

$E_{\sqrt{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

• $E_0(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid AU = 0\}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AU = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ x + z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -x \end{array} \right.$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 0 \text{ et } z = -x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$.

D'où $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

• A est diagonalisable donc elle s'écrit sous la forme $A = PDP^{-1}$, où :

– D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs

propres de A,
$-$ P est une matrice inversible dont les colonnes sont formées d'une base de sous-espaces propres de A.

Les familles $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sont des bases respectives de $E_{-\sqrt{2}}(A)$, $E_0(A)$ et $E_{\sqrt{2}}(A)$ puisque constituées d'un vecteur générateur et libre (car non nul).

On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Les matrices P et D vérifient bien les contraintes imposées.

4)$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A.$

Partie II :

$$
\begin{aligned}
5)\mathscr{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ aI + bA + cA^2, (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\} \\
&= \text{Vect}\left(I, A, A^2\right).
\end{aligned}
$$

Donc $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
De plus, (I, A, A^2) est une famille génératrice de $\mathscr{E}$.
Elle est libre d'après 2), c'est donc une base de $\mathscr{E}$. Donc $dim\mathscr{E} = 3$.

6)Soit $M \in \mathscr{E}$. Alors, il existe des réels a, b et c tels que $M = aI + bA + cA^2$.
On a alors : $M = A(aI + bA + cA^2)$

$$
\begin{aligned}
&= aA + bA^2 + cA^3 \\
&= aA + bA^2 + c(2A) \quad \text{d'après 4)} \\
&= 0I + (a+2c)A + bA^2.
\end{aligned}
$$

Donc $AM \in \mathscr{E}$.

7)La question précédente montre que f est « endo ».

De plus, pour tout réel λ et toutes matrices M et N de $\mathscr{E}$, on a :

$f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N)$ donc f est linéaire.

Ainsi, f est un endomorphisme de E.

8)$f(I) = AI = A = 0I + 1A + 0A^2$,
$f(A) = A^2 = 0I + 0A + 1A^2$,
$f(A^2) = A^3 = 2A = 0I + 2A + 0A^2$.

Donc $F = \mathscr{M}_{(I,A,A^2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9)a)$\forall M \in \mathscr{E},\ (f \circ f \circ f)(M) = (f \circ f)(f(M)) = (f \circ f)(AM) = f\big(f(AM)\big)$
$= f(AAM) = f(A^2M) = AA^2M = A^3M = 2AM = 2f(M)$.

Donc $f \circ f \circ f = 2f$.

✓ On pouvait aussi montrer que $F^3 = 2F$.

b)D'après la question précédente, on a : $f \circ f \circ f - 2f = 0$, c'est-à-dire $f^3 - 2f = 0$.
En posant $P(X) = X^3 - 2X$, on a alors $P(f) = 0$, ce qui prouve que P est un polynôme annulateur de f.
Toute valeur propre λ de f est alors racine de P, elle vérifie donc $\lambda^3 - 2\lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda^3 = 2\lambda$.

c)$\lambda^3 - 2\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 2) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = \sqrt{2}$ ou $\lambda = -\sqrt{2}$.

Les valeurs propres possibles de f sont donc $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$. Il reste à vérifier si elles le sont, en s'aidant de F.

• $E_{-\sqrt{2}}(F) = \big\{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (F + \sqrt{2}I)U = 0\big\}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(F + \sqrt{2}I)U = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \sqrt{2}x & = & 0 \\ x + \sqrt{2}y + 2z & = & 0 \\ y + \sqrt{2}z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -\sqrt{2}z \end{array} \right.$$

Donc $E_{-\sqrt{2}}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } y = -\sqrt{2}z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\}$.

D'où $E_{-\sqrt{2}}(F) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

En revenant à f, on déduit : $E_{-\sqrt{2}}(f) = \mathrm{Vect}\left(-\sqrt{2}A + A^2\right)$.

• $E_{\sqrt{2}}(F) = \big\{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (F - \sqrt{2}I)U = 0\big\}$.

En reprenant le calcul précédent avec $\sqrt{2} \to -\sqrt{2}$, on obtient :

$E_{\sqrt{2}}(f) = \mathrm{Vect}\left(\sqrt{2}A + A^2\right)$.

• $E_0(F) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid FU = 0\}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$FU = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} x + 2z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = -2z \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_0(F) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -2z \text{ et } y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\}$.

D'où $E_0(F) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

En revenant à f, on déduit : $E_0(f) = \text{Vect}\left(-2I + A^2\right)$.

10)0 est valeur propre de f donc f n'est pas bijectif.

f est un endomorphisme de $\mathscr{E}$, espace vectoriel de dimension 3, qui admet 3 valeurs propres distinctes. Donc f est diagonalisable.

11)• (I, A, A^2) est une base de $\mathscr{E}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } Imf &= \text{Vect}\left(f(I), f(A), f(A^2)\right) \\ &= \text{Vect}\left(A, A^2, 2A\right) \\ &= \text{Vect}\left(A, A^2\right). \end{aligned}$$

(A, A^2) est une famille génératrice de Imf. Elle est libre car les matrices A et A^2 ne sont pas colinéaires. Donc (A, A^2) est une base de Imf.

• $Kerf = E_0(f) = \text{Vect}\left(-2I + A^2\right)$.

$\left(-2I + A^2\right)$ est une famille génératrice de $Kerf$. Elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. Donc $\left(-2I + A^2\right)$ est une base de $Kerf$.

12)a)Supposons que $I + A^2 \in Imf$.

Alors, il existe des réels a et b tels que $I + A^2 = aA + bA^2$.

On a alors : $I = aA + (b-1)A^2$ ce qui prouve que la famille (I, A, A^2) est liée. Cela contredit la question 2). Donc $I + A^2 \notin Imf$.

Comme $\forall M \in \mathscr{E},\ f(M) \in Imf$, l'équation $f(M) = I + A^2$ n'a donc pas de solution.

b)Soit (E) l'équation $f(N) = A + A^2$.

On sait que $f(I) = A$ et que $f(A) = A^2$.

Par linéarité de f, on a : $f(I + A) = f(I) + f(A) = A + A^2$.

Donc $I + A$ est solution de l'équation (E).

On va maintenant se servir de $Kerf$ pour trouver toutes les solutions de (E).

$$\begin{aligned} f(N) = A + A^2 &\iff f(N) = f(I + A) \\ &\iff f(N) - f(I + A) = 0 \\ &\iff f(N - I - A) = 0 \quad \text{par linéarité de } f \\ &\iff N - I - A \in Kerf \\ &\iff \exists \gamma \in \mathbf{R} \mid N - I - A = \gamma(-2I + A^2) \\ &\iff \exists \gamma \in \mathbf{R} \mid N = (1 - 2\gamma)I + A + \gamma A^2. \end{aligned}$$

Exercice 2 (eml 2016)

Partie I

1)f est continue sur $]0,+\infty[$ comme différence et produit de fonctions continues.

$\lim\limits_{t\to 0^+} t^2 = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ par croissances comparées.

Par différence, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en zéro.

Finalement, f est continue sur $[0,+\infty[$.

2)f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ comme différence et produit de fonctions C^2.

$\forall t>0,\ f'(t) = 2t - \left(1\times \ln t + t\times \dfrac{1}{t}\right) = 2t - \ln t - 1.$

$\forall t>0,\ f''(t) = 2 - \dfrac{1}{t} = \dfrac{2t-1}{t}.$

3)• $\forall t>0,\ f''(t)\geq 0 \iff t \geq \dfrac{1}{2}$, d'où le tableau de variations de f' :

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(t)$		$-$	0	$+$	
$f'(t)$		$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln 2.$

Le tableau donne $\forall t>0,\ f'(t)\geq \ln 2 > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

• $\forall t>0,\ f(t) = t^2\left(1 - \dfrac{\ln t}{t}\right)$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 = +\infty$,

$\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$ par croissances comparées, puis $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln t}{t}\right) = 1$,

Par produit, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.

D'où le tableau de variations de f :

t	0		$+\infty$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4)a)$\forall t > 0,\ \dfrac{f(t) - f(0)}{t} = \dfrac{t^2 - t\ln t - 0}{t} = t - \ln t.$

$\lim\limits_{t\to 0^+} t = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$. Par différence, $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(t) - f(0)}{t} = +\infty.$

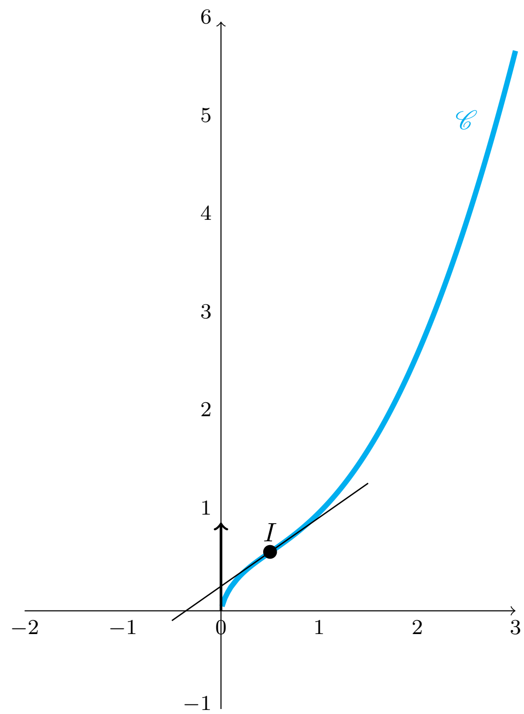
Cette limite est infinie donc f n'est pas dérivable en zéro.
Cependant $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente verticale en O.

b)f'' s'annule une seule fois en $\dfrac{1}{2}$ et change de signe en $\dfrac{1}{2}$.

Donc $\mathscr{C}$ admet un seul point d'inflexion I d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

Son ordonnée est $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\ln 2}{2}.$

c)Allure de $\mathscr{C}$



5)f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
D'après le théorème de bijection, f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f\big([0, +\infty[\big) = [0, +\infty[$.
$1 \in [0, +\infty[$ possède donc un unique antécédent par f, ce qui signifie que l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution.

Or, $f(1) = 1$ donc 1 est l'unique solution de l'équation $f(t) = 1$.

Partie II

6)Pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, on a :

$\partial_1 F(x,y) = \ln y - y \times \dfrac{1}{x} = \ln y - \dfrac{y}{x}$,

$\partial_2 F(x,y) = x \times \dfrac{1}{y} - \ln x = \dfrac{x}{y} - \ln x$.

7)a)Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$.

(x,y) est un point critique de F

$$\iff \begin{cases} \partial_1 F(x,y) & = 0 \\ \partial_2 F(x,y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln y - \dfrac{y}{x} & = 0 \\ \dfrac{x}{y} - \ln x & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ln y - y & = 0 \\ \ln x & = \dfrac{x}{y} \end{cases}$$

Comme $x > 0$ et $y > 0$, on a $\dfrac{x}{y} > 0$ donc $\ln x > 0$, c'est-à-dire $x > 1$.

Ainsi, la deuxième équation est équivalente à $\ln x = \dfrac{x}{y}$ et $x > 1$.

On a alors $\ln x \neq 0$, ce qui permet d'écrire : $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

Le système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} x \ln y - y = 0 \\ y = \dfrac{x}{\ln x} \text{ et } x > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ln\left(\dfrac{x}{\ln x}\right) - \dfrac{x}{\ln x} = 0 \\ y = \dfrac{x}{\ln x} \text{ et } x > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \left(\ln\left(\dfrac{x}{\ln x}\right) - \dfrac{1}{\ln x}\right) = 0 \\ y = \dfrac{x}{\ln x} \text{ et } x > 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln\left(\dfrac{x}{\ln x}\right) - \dfrac{1}{\ln x} = 0 \quad \text{car } x \neq 0 \\ y = \dfrac{x}{\ln x} \text{ et } x > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln x - \ln(\ln x) - \dfrac{1}{\ln x} = 0 \\ y = \dfrac{x}{\ln x} \text{ et } x > 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\ln x)^2 - \ln x \times \ln(\ln x) - 1 = 0 \\ y = \dfrac{x}{\ln x} \text{ et } x > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f(\ln x) = 1 \\ y = \dfrac{x}{\ln x} \text{ et } x > 1 \end{cases}$$

b)En utilisant la question 5), on a : $f(\ln x) = 1 \iff \ln x = 1 \iff x = e$.

Puis, en reprenant les équivalences de la question 7)a) :

$$(x,y) \text{ est un point critique de } F \iff \begin{cases} x = e \\ y = \dfrac{e}{\ln e} \end{cases} \iff \begin{cases} x = e \\ y = e \end{cases}$$

Donc F admet (e,e) comme seul point critique.

8)Pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, on a :

$\partial_{1,1} F(x,y) = \partial_1 \left(\ln y - \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{y}{x^2}$,

$\partial_{1,2} F(x,y) = \partial_1 \left(\dfrac{x}{y} - \ln x\right) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$,

$\partial_{2,1}F(x,y) = \partial_2\left(\ln y - \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$,

$\partial_{2,2}F(x,y) = \partial_2\left(\dfrac{x}{y} - \ln x\right) = -\dfrac{x}{y^2}$.

La matrice hessienne de F au point (e,e) est :

$$\begin{pmatrix} \partial_{1,1}F(e,e) & \partial_{1,2}F(e,e) \\ \partial_{2,1}F(e,e) & \partial_{2,2}F(e,e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{e} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonale, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, c'est-à-dire $\dfrac{1}{e}$ et $-\dfrac{1}{e}$.

Ces valeurs propres sont non nulles et de signes contraires.

Donc F n'admet pas d'extrémum local en (e,e), c'est un col.

Partie III

9)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ ».

Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $\dfrac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$ », c'est vrai puisque $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a : $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

Par croissance de f, on déduit :

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(1)$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{4} + \dfrac{\ln 2}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.

Or, $\ln 2 \geq \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{4} + \dfrac{\ln 2}{2} \geq \dfrac{1}{2}$. Donc $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

10)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_{n+1} \geq u_n$ ».

Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $u_1 \geq u_0$ ».

$u_1 = f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\ln 2}{2} \geq \dfrac{1}{2} = u_0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a : $u_{n+1} \geq u_n$.

Par croissance de f, on déduit : $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \geq u_n$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

11)La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée (par 1) donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone.

Notons $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Comme $\forall n \in \mathbf{N},\ \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, on a par passage à la limite : $\dfrac{1}{2} \leq L \leq 1$.
f est continue sur $[0, +\infty[$ donc en L.
D'après le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $f(x) = x$.
Or, $f(L) = L \Longleftrightarrow L^2 - L\ln L = L \Longleftrightarrow L(L - \ln L - 1) = 0$
$\Longleftrightarrow L - \ln L - 1 = 0 \Longleftrightarrow L - \ln L = 1$.
Pour finir, étudions la fonction définie sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ par $g(t) = t - \ln t$.
g est dérivable sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et $\forall t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right],\ g'(t) = 1 - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t-1}{t} \leq 0$.
g est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et continue.
g est donc bijective, d'après le théorème de bijection.
En revenant aux équivalences ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} f(L) = L \text{ et } \frac{1}{2} \leq L \leq 1 &\Longleftrightarrow g(L) = 1 \text{ et } \frac{1}{2} \leq L \leq 1 \\ &\Longleftrightarrow g(L) = g(1) \text{ et } \frac{1}{2} \leq L \leq 1 \quad \text{car } g(1) = 1 \\ &\Longleftrightarrow L = 1 \quad \text{par bijectivité de } g. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

12)programme :

```
import numpy as np
u=1/2
N=0
while 1-u>=10**-4:
    N=N+1
    u=u**2-u*np.log(u)
print(N)
```

✓ Python renvoie $N = 19994$.

Exercice 3 (eml 2016)

Partie I

1)$\forall t \in \mathbf{R},\ f(-t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$

$$= \frac{e^{-2t}e^t}{e^{-2t}(1+e^t)^2}$$

$$= \frac{e^{-t}}{e^{-2t}(1+2e^t+e^{2t})}$$

$$= \frac{e^{-t}}{e^{-2t}+2e^{-t}+1}$$

$$= \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$$

$$= f(t).$$

Donc f est paire.

2)• f est définie sur $\mathbf{R}$.

• f est continue sur $\mathbf{R}$ comme somme, composée et quotient de deux fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.

• $\forall t \in \mathbf{R},\ e^{-t} > 0$ et $(1+e^{-t})^2 > 0$ donc $f(t) > 0$.

• Pour tout réel $A > 0$, on a :

$$\int_0^A f(t)dt = \int_0^A \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_0^A = \frac{1}{1+e^{-A}} - \frac{1}{2}.$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-A} = 0$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A f(t)dt = \frac{1}{2}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

f est paire et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)dt = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Ainsi, f est bien une densité.

3)La fonction de répartition F de X est donnée par :

$\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$= \lim_{B\to-\infty}\int_B^x f(t)dt$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_B^x$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\left(\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-B}}\right).$$

$\lim_{B \to -\infty} e^{-B} = +\infty$ donc $\lim_{B \to -\infty} \dfrac{1}{1+e^{-B}} = 0$.

On conclut que $\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

4)a)$\forall t \in \mathbf{R},\ t^3 f(t) = \dfrac{t^3}{e^t} \times \dfrac{1}{(1+e^{-t})^2}$.

$\lim_{t \to +\infty} (1+e^{-t})^2 = 1$. Par inverse, $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{1}{(1+e^{-t})^2} = 1$.

$\lim_{t \to +\infty} \dfrac{t^3}{e^t} = 0$ par croissances comparées.

Par produit, $\lim_{t \to +\infty} t^3 f(t) = 0$, ce qui prouve que $t f(t) \underset{+\infty}{=} 0 \left(\dfrac{1}{t^2} \right)$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente car de paramètre $2 > 1$.

D'après le critère de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t f(t) dt$ converge.

Enfin, $\displaystyle\int_0^1 t f(t) dt$ converge car ce n'est pas une intégrale impropre.

Par Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge.

b)Notons $g : t \mapsto t f(t)$.
$\forall t \in \mathbf{R},\ g(-t) = (-t) \times f(-t) = -t f(t) = -g(t)$ donc g est impaire.

X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)| dt$ converge.

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |t f(t)| dt = \int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge d'après 4)a).
De plus, la fonction $t \mapsto |t f(t)|$ est paire.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)| dt$ converge.
X admet donc une espérance donnée par :

$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = 0$ par imparité de $t \mapsto t f(t)$.

Partie II

5)ϕ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ (par composée de fonctions strictement croissante) et continue sur $\mathbf{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $I = \varphi(\mathbf{R})$, avec $I =]\lim_{x \to -\infty} \varphi(x), \lim_{x \to +\infty} \varphi(x)[$.

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \to -\infty} (1+e^x) = 1$,
$\lim_{t \to 1} \ln t = 0$.

Par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)=+\infty$,

$\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$.

Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

Ainsi, $I=]0,+\infty[$.

6)$\forall y>0,\ y=\varphi(x)\iff y=\ln\left(1+e^x\right)$

$$\begin{aligned}&\iff e^y=1+e^x\\&\iff e^x=e^y-1\\&\iff x=\ln\left(e^y-1\right).\end{aligned}$$

Comme $y>0$, alors $e^y-1>0$ ce qui définit bien $\ln\left(e^y-1\right)$.

Les équivalences prouvent que $\forall y>0,\ \varphi^{-1}(y)=\ln\left(e^y-1\right)$.

7)φ prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$ donc Y aussi.
Par conséquent, $P(Y\le 0)=0$.

8)La fonction de répartition G de Y est donnée par : $\forall x\in\mathbf{R},\ G(x)=P(Y\le x)$.
Distinguons deux cas :

• premier cas : $x\le 0$.
On a alors $(Y\le x)\subset(Y\le 0)$ donc $P(Y\le x)\le P(Y\le 0)=0$, ce qui entraîne que $P(Y\le x)=0$. Donc $G(x)=0$.

• deuxième cas : $x>0$

$$\begin{aligned}G(x)&=P(Y\le x)\\&=P\big(\varphi(X)\le x\big)\\&=P\big(X\le\varphi^{-1}(x)\big)\quad\text{par croissance de }\varphi^{-1}\\&=F\big(\varphi^{-1}(x)\big)\\&=\frac{1}{1+e^{-\varphi^{-1}(x)}}\quad\text{d'après 3)}\\&=\frac{1}{1+e^{-\ln(e^x-1)}}\quad\text{d'après 6)}\\&=\frac{1}{1+\frac{1}{e^x-1}}\quad\text{car }\forall a>0,\ e^{-\ln a}=\frac{1}{e^{\ln a}}=\frac{1}{a}\\&=\frac{e^x-1}{e^x}\\&=1-e^{-x}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a : $G(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le 0\\ 1-e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$

9)On voit que $Y\hookrightarrow\mathscr{E}(1)$.

Le cours donne : $E(Y)=\dfrac{1}{\lambda}=1$ et $V(Y)=\dfrac{1}{\lambda^2}=1$.

Partie III

10)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons F_n la fonction de répartition de T_n.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R},\ F_n(x) &= P(T_n \leq x) = P\big((X_1 \leq x) \cap ... \cap (X_n \leq x)\big)\\ &= P(X_1 \leq x) \times \cdots \times P(X_n \leq x) \quad \text{par indépendance de } X_1, ..., X_n\\ &= F(x) \times \cdots \times F(x) \quad \text{car } X_1, ..., X_n \text{ ont même loi que } X\\ &= F(x)^n\\ &= \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^n.\end{aligned}$$

b)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}P(U_n \leq x) &= P(T_n - \ln n \leq x)\\ &= P(T_n \leq x + \ln n)\\ &= F_n(x + \ln n)\\ &= \left(\frac{1}{1+e^{-(x+\ln n)}}\right)^n.\\ &= \left(1+e^{-(x+\ln n)}\right)^{-n}\\ &= \left(1+e^{-x}e^{-\ln n}\right)^{-n}\\ &= \left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}.\end{aligned}$$

11)a)F_U est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ par composée de fonctions de classe C^1.
Elle est donc continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ (s'il manquait quelques points, ça irait quand même).
Donc U est une variable aléatoire à densité.

Une densité f_U de U est donnée par :

$\forall x \in \mathbf{R},\ f_U(x) = F_U'(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}} = e^{-x-e^{-x}}$.

✓ On dit que U suit la loi de Gumbel.

b)Soit $x \in \mathbf{R}$. Cherchons $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n \leq x)$.

$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(U_n \leq x) = e^{-n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)}$.

$\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{n} = 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{e^{-x}}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{n}$.

Par produit, $-n\ln\left(1+\dfrac{e^{-x}}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -e^{-x}$.

ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\ln\left(1+\dfrac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.

En composant avec l'exponentielle, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n \leq x) = e^{-e^{-x}} = F_U(x)$.

Donc $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers U.