Exercice HEC 2018

1)a)M est triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
Donc $sp(M) = \{0\}$.

Si M était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont la diagonale comporterait les valeurs propres de M. Aussi, on aurait $M = PDP^{-1}$ avec $D = 0$, ce qui conduirait à $M = O$, ce qui est absurde.
Donc M n'est pas diagonalisable.

$$\begin{aligned}
\text{1)b)On a : } rg(M) &= dimVect\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\\
&= dimVect\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\\
&= 2\ (\textit{car les vecteurs sont libres}).
\end{aligned}$$

En outre, $M^2 = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. Donc $rg(M^2) = 1$.

1)c)Soit A, l'ensemble des polynômes annulateurs de M de degré 3.

On a $M^3 = O$ donc $\forall a \in \mathbf{R}^* : aM^3 = 0$.
Donc pour tout réel a non-nul, aX^3 est un polynôme annulateur de M de degré 3. Ainsi, $\left\{aX^3, a \in \mathbf{R}^*\right\} \subset A$.

Réciproquement, soit P un polynôme annulateur de M de degré 3.
Comme $sp(M) \subset \{\textit{racines de } P\}$, 0 est nécessairement racine de P.
P est donc de la forme : $P(X) = X(aX^2 + bX + c)$.
$P(M) = O$ donne : $M(aM^2 + bM + I) = O$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&0&0&0\\0&c&b&a\\0&0&c&b\\0&0&0&c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Soit : $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&c&b\\0&0&0&c\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, d'où $b = c = 0$.

On déduit que $P(X) = aX^3$, ce qui montre que $A \subset \left\{aX^3, a \in \mathbf{R}^*\right\}$.

On conclut que $A = \left\{aX^3, a \in \mathbf{R}^*\right\}$.

2)a)On a : $r_0 = dimF_0 = dimIm(f^0) = dimIm(id) = n$ car id est un endomorphisme bijectif de $\mathbf{R}^n$.

On a : $r_n = dimF_n = dimIm(f^n) = dimIm(0_{\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)}) = 0$ car $0_{\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)}$ est l'endomorphisme nul de $\mathbf{R}^n$.

2)b)i)On a : $rg(g_j) = dimIm(g_j)$.

Or, $Im(g_j)$
$= \{g_j(x), x \in F_j\}$
$= \{f(x), x \in F_j\}$
$= \left\{f(x), x = f^j(z) \ et \ z \in \mathbf{R}^n\right\}$
$= \left\{f(f^j(z)),\ z \in \mathbf{R}^n\right\}$
$= \left\{f^{j+1}(z),\ z \in \mathbf{R}^n\right\}$
$= Imf^{j+1}$.

Donc rg $(g_j) = r_{j+1}$.

2)b)ii)Le théorème du rang pour l'application linéaire $g_j : F_j \to \mathbf{R}^n$ donne :

$dimF_j = dimKer(g_j) + dimIm(g_j)$

Soit, $r_j = dimKer(g_j) + r_{j+1}$ (grâce à la question 2)b)i)).

En outre, $x \in Ker(g_j)$
$\iff \forall x \in F_j : g_j(x) = 0$
$\iff \forall x \in F_j : f(x) = 0$
$\iff x \in Ker(f) \ et \ x \in F_j$
$\iff x \in Ker(f) \cap F_j$.

On déduit que $r_j - r_{j+1} = dim(Ker(f) \cap F_j)$.

2)c)Pour tout $j \in [\![0; n-2]\!]$, on a : $F_{j+1} \subset F_j$.
En effet, si $x \in F_{j+1}$, il existe $z \in \mathbf{R}^n$ tel que $x = f^{j+1}(z) = f^j(f(z))$, ce qui donne $x \in Im(f^j) = F_j$.

De l'inclusion précédente, il résulte que $ker(f) \cap F_{j+1} \subset ker(f) \cap F_j$.

Donc $0 \leq dim(ker(f) \cap F_{j+1}) \leq dim(ker(f) \cap F_j) \leq n$.

Soit ; $0 \leq r_{j+1} - r_{j+2} \leq r_j - r_{j+1} \leq n$.

Ces inégalités, déroulées pour j allant de 0 à $n-2$ donnent le résultat escompté.

3)a)Pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, notons $A_i = \{j \in [\![0; n-1]\!], r_j - r_{j+1} = i\}$.

La famille $(A_0, A_1, ..., A_n)$ est une partition de $[\![0; n-1]\!]$.
En effet, les A_i sont clairement disjoints deux à deux et leur réunion fait $[\![0; n-1]\!]$ (du fait que pour tout indice $j \in [\![0; n-1]\!]$, on peut toujours trouver un entier $i \in [\![0; n]\!]$ tel que $r_j - r_{j+1} = i$, par le simple fait que r_j et r_{j+1} sont des entiers compris entre 0 et n).

Par ailleurs, on a par télescopage :

$$\sum_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1}) = r_0 - r_n = n.$$

Ce qui peut s'écrire du fait de la partition trouvée précédemment :

$$\sum_{j\in A_0}(r_j-r_{j+1})+\sum_{j\in A_1}(r_j-r_{j+1})+\sum_{j\in A_2}(r_j-r_{j+1})+...+\sum_{j\in A_n}(r_j-r_{j+1})=n$$

$$\sum_{j\in A_0}0+\sum_{j\in A_1}1+\sum_{j\in A_2}2+...+\sum_{j\in A_n}n=n$$

$0+1\times Card(A_1)+2\times Card(A_2)+...+n\times Card(A_n)=n$

$x_1+2x_2+...+nx_n=n.$

Donc $(x_1,...,x_n)\in P(n)$.

3)b)i)On a : $r_0=4$ et $r_4=0$.
$r_1=dim(Imf)=rg(f)=rg(M)=2$
$r_2=dim(Imf^2)=rg(f^2)=rg(M^2)=1$
$r_3=dim(Imf^3)=rg(f^3)=rg(M^3)=0$ car $M^3=O$.

Calculons maintenant x_1, x_2, x_3 et x_4.

$x_1=Card\{j\in [\![0;3]\!], r_j-r_{j+1}=1\}$.
Or, l'égalité $r_j-r_{j+1}=1$ ne se produit que pour les deux indices $j=1$ et $j=2$. C'est pourquoi $x_1=2$.

Un même raisonnement donne : $x_2=1$, $x_3=0$ et $x_4=0$.

✓ On a bien : $2+2\times1+3\times0+4\times0=4$ donc $(2,1,0,0)\in P(4)$.

3)b)ii)Déterminons $P(4)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{N}^4, x_1+2x_2+3x_3+4x_4=4\}$.
Commençons par choisir x_4. Il peut faire 1, auquel cas $x_1=x_2=x_3=0$, ce qui donne un premier quadruplet $(0,0,0,1)$ de $P(4)$.
Il peut faire aussi 0, auquel cas $x_3=0$ ou $x_3=1$.
A l'aide d'un arbre, de proche en proche, on détermine x_4, puis x_3, puis x_2, puis x_1. On trouve alors :

$P(4)=\{(0,0,0,1);(1,0,1,0);(0,2,0,0);(2,1,0,0);(4,0,0,0)\}$.

Et $p(4)=Card(P(4))=5$.

3)b)iii)Il faut faire l'étude pour chacun des 5 quadruplets précédents :

<u>pour (0,0,0,1) :</u>

Prenons $M=O$.
On a alors : $r_0=4$ et $r_1=r_2=r_3=r_4=0$.
Il n'y a aucun indice $j\in[\![0;3]\!]$ pour lequel $r_j-r_{j+1}=1,2$ *ou* 3. Donc $x_1=x_2=x_3=0$.
Et il y n'y a que pour l'indice $j=0$ que $r_j-r_{j+1}=4$. Donc $x_4=1$.

<u>pour (1,0,1,0) :</u>

Prenons $M=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

On a alors : $r_0 = 4$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0$ car $M^2 = 0$, $r_3 = 0$ et $r_4 = 0$.
Puis, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ et $x_4 = 0$.

<u>pour (0,2,0,0) :</u>

Prenons $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors : $r_0 = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = 0$ car $M^2 = 0$, $r_3 = 0$ et $r_4 = 0$.
Puis, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$.

<u>pour (2,1,0,0) :</u>

Prenons $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

C'est la question 3)a).

<u>pour (4,0,0,0) :</u>

Prenons $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors : $r_0 = 4$, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$ et $r_4 = 0$.
Puis, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$.

4)a)i)On a : $Q(1,k) = \{(x_1, ..., x_k) \in P(k), x_1 + ... + x_k \leq 1\}$.

Les k-uplets $(x_1, ..., x_k)$ de $\mathbf{N}^k$ tels que $x_1 + ... + x_k \leq 1$ sont : (0,...,0) ; (1,0,...,0) ; (0,1,0,...,0) ; ... ; (0,...,0,1,0) ; (0,...,0,1).

Pour chacun de ces k-uplets, la somme $x_1 + 2x_2 + ... + kx_k$ vaut respectivement $0, 1, 2, ..., k-1, k$.

Donc parmi ces k-uplets, seul (0,...,0,1) est dans $P(k)$.

Ainsi, $Q(1,k) = \{(0, ..., 0, 1)\}$.

4)a)ii)Soit $l \geq k$ un entier.
On a par construction : $Q(l,k) \subset P(k)$.
Réciproquement, soit $(x_1, ..., x_k) \in P(k)$. On a $x_1 + 2x_2 + ... + kx_k = k$.
Or, $k \leq l$ donc $x_1 + 2x_2 + ... + kx_k \leq l \quad (1)$
Par ailleurs, x_1, ..., x_k étant positifs ou nuls, on a :
$x_1 \leq x_1$
$x_2 \leq 2x_2$
.
.
.
$x_k \leq kx_k$

Ce qui donne en sommant les inégalités :

$x_1 + x_2 + ... + x_k \leq x_1 + 2x_2 + ... + kx_k \quad (2)$

De (1) et (2), on déduit que $x_1 + x_2 + ... + x_k \leq l$, ce qui montre que $(x_1, ..., x_k) \in Q(l, k)$ et l'inclusion $P(k) \subset Q(l, k)$.

On conclut que $Q(l, k) = P(k)$.

4)b)On a : $Q(l, k-l) = \{(x_1, ..., x_{k-l}) \in P(k-l), x_1 + ... + x_{k-l} \leq l\}$
$= \left\{(x_1, ..., x_{k-l}) \in \mathbf{N}^{k-l}, x_1 + 2x_2 + ... + (k-l)x_{k-l} = k-l \; et \; x_1 + ... + x_{k-l} \leq l\right\}$.

Posons $E = \{(x_1, ..., x_k) \in P(k), x_1 + ... + x_k = l\}$, c'est-à-dire :
$E = \left\{(x_1, ..., x_k) \in \mathbf{N}^k, x_1 + 2x_2 + ... + kx_k = k \; et \; x_1 + ... + x_k = l\right\}$.

L'idée est de construire une bijection φ de E sur $Q(l, k-l)$, ce qui montrera qu'ils ont même cardinal et répondra à la question.

Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbf{N}^{k-l}$
$\quad (x_1, ..., x_k) \mapsto (x_2, ..., x_{k-l+1})$.

• Montrons que φ est à valeurs dans $Q(l, k-l)$.
Soit $(x_1, ..., x_k)$ un élément de E.
Comme x_1, ..., x_k sont positifs ou nuls, on a $x_2 + ... + x_{k-l+1} \leq x_1 + ... + x_k$.
Or, $x_1 + ... + x_k = l$ donc $x_2 + ... + x_{k-l+1} \leq l \quad (3)$

De plus, on a : $x_1 + 2x_2 + ... + kx_k = k$ et $x_1 + x_2 + ... + x_k = l$.

Par différence des deux lignes, on déduit : $x_2 + 2x_3 + ... + (k-1)x_k = k - l$.

Soit, en détaillant un peu plus de termes :

$x_2 + 2x_3 + ... + (k-l)x_{k-l+1} + (k-l+1)x_{k-l+2} + ... + (k-1)x_k = k - l \quad (4)$

Cela entraîne que $x_{k-l+2} = ... = x_k = 0$ (car si l'un d'entre eux n'était pas nul, on aurait $(k-l+1)x_{k-l+2} + ... + (k-1)x_k > k-l$, ce qui serait en contradiction avec (4)).

De (4), on déduit : $x_2 + 2x_3 + ... + (k-l)x_{k-l+1} = k - l \quad (5)$

(3) et (5) montrent que $(x_2, ..., x_{k-l+1}) \in Q(l, k-l)$.

• Montrons que φ est injective.
Soient $(x_1, ..., x_k) \in E$ et $(z_1, ..., z_k) \in E$ tels que $\varphi(x_1, ..., x_k) = \varphi(z_1, ..., z_k)$.
Montrons que $(x_1, ..., x_k) = (z_1, ..., z_k)$.
Comme $(x_1, ..., x_k) \in E$, on a : $x_{k-l+2} = ... = x_k = 0$ (voir le point ci-dessus).
Comme $(z_1, ..., z_k) \in E$, on a aussi : $z_{k-l+2} = ... = z_k = 0$.
Il en résulte que :

$$\left.\begin{array}{l} x_{k-l+2} = z_{k-l+2} \\ . \\ . \\ . \\ x_k = z_k. \end{array}\right. \qquad (6)$$

De plus, comme $\varphi(x_1, ..., x_k) = \varphi(z_1, ..., z_k)$, on a : $(x_2, ..., x_{k-l+1}) = (z_2, ..., z_{k-l+1})$, c'est-à-dire :

$x_2 = z_2$
.
. (7)
.
$x_{k-l+1} = z_{k-l+1}$
Comme $(x_1, ..., x_k)$ et $(z_1, ..., z_k)$ sont dans E, on a enfin : $x_1 + ... + x_k = l$ et $z_1 + ... + z_k = l$, ce qui compte-tenu de (6) et (7) mènent à :

$x_1 = z_1$ (8)

De (6),(7),(8), on déduit $(x_1, ..., x_k) = (z_1, ..., z_k)$, d'où l'injectivité de φ.

• Montrons que φ est surjective.
Soit $(y_1, ..., y_{k-l}) \in Q(l, k-l)$.
On a alors : $y_1 + 2y_2 + ... + (k-l)y_{k-l} = k-l$ et $y_1 + ... + y_{k-l} \leq l$.
Posons $x_1 = l - (y_1 + ... + y_{k-l})$. On a alors $x_1 \in \mathbf{N}$.
De plus, $\varphi(x_1, y_1, ..., y_{k-l}, 0, ..., 0) = (y_1, ..., y_{k-l})$.
Il reste à prouver que $(x_1, y_1, ..., y_{k-l}, 0, ..., 0) \in E$.

Or, on a : $x_1 + y_1 + ... + y_{k-l} + 0 + ... + 0 = l$ (9) par construction de x_1.

Et, $x_1 + 2y_1 + ... + (k-l+1)y_{k-l} + (k-l+2) \times 0 + ... + k \times 0$
$= l - (y_1 + ... + y_{k-l}) + 2y_1 + ... + (k-l+1)y_{k-l}$
$= l + y_1 + 2y_2 + ... + (k-l)y_{k-l}$
$= l + (k-l)$
$= k$ (10).

(9) et (10) prouvent que $(x_1, y_1, ..., y_{k-l}, 0, ..., 0) \in E$. Et c'est en outre, on l'a vu, un antécédent de $(y_1, ..., y_{k-l}$.

• φ étant injective et surjective, elle est bijective. Ses ensembles de départ et d'arrivée ont donc même cardinal.
Donc $Card(Q(l, k-l) = Card(E)$.

Soit, $q(l, k-l) = Card\{(x_1, ..., x_k) \in P(k), x_1 + ... + x_k = l\}$.

4)c)i)On a : $Q(l, k) = \{(x_1, ..., x_k) \in P(k), x_1 + ... + x_k \leq l\}$
et $Q(l-1, k) = \{(x_1, ..., x_k) \in P(k), x_1 + ... + x_k \leq l-1\}$.

Posons $E = \{(x_1, ..., x_k) \in P(k), x_1 + ... + x_k = l\}$.

On a : $E \subset Q(l, k)$ et $Q(l-1, k) \subset Q(l, k)$ donc $Q(l-1, k) \cup E \subset Q(l, k)$.

Réciproquement, soit $(x_1, ..., x_k) \in Q(l, k)$. Alors on a : $x_1 + ... + x_k \leq l$.
Cette somme étant un entier, elle peut :
$-$ être égale à l, auquel cas $(x_1, ..., x_k) \in E$.
$-$ être inférieure ou égale à $l-1$, auquel cas $(x_1, ..., x_k) \in Q(l-1, k)$.
Donc $Q(l, k) \subset Q(l-1, k) \cup E$.

On a donc finalement : $Q(l, k) = Q(l-1, k) \cup E$.

Les ensembles $Q(l-1, k)$ et E étant disjoints, on a alors :
$card(Q(l, k)) = card(Q(l-1, k) + card(E)$.

Soit, $q(l, k) = q(l-1, k) + q(l, k-l)$ compte-tenu de la question 4)b).

4)c)ii)L'égalité ci-dessus n'est pas utilisable pour $k = l$, il faut donc refaire un raisonnement analogue à la question 4)c)i).

On a $Q(l,l) = \{(x_1, ..., x_l) \in P(l), x_1 + ... + x_l \leq l\}$
et $Q(l-1,l) = \{(x_1, ..., x_l) \in P(l), x_1 + ... + x_l \leq l-1\}$.

Posons $E = \{(x_1, ..., x_l) \in P(l), x_1 + ... + x_l = l\}$.

On a de la même manière qu'en 4)c)i) :

$Q(l,l) = Q(l-1,l) \cup E$ avec $Q(l-1,l)$ et E disjoints.
Donc $card(Q(l,l)) = Card(Q(l-1,l)) + Card(E)$
soit $q(l,l) = q(l-1,l) + Card(E)$.

Il reste à déterminer $Card(E)$.
Soit $(x_1, ..., x_l) \in E$.
On a alors $x_1 + ... + x_l = l$ et $x_1 + 2x_2 + ... + lx_l = l$.
Par différence, on tire : $x_2 + 2x_3 + ... + (l-1)x_l = 0$, ce qui entraîne que $x_2 = ... = x_l = 0$, puis $x_1 = l$.

Donc $E = \{(l, 0, ..., 0)\}$ et $Card(E) = 1$.

On conclut que $q(l,l) - q(l-1,l) = 1$.

5)a)La matrice $qmatrix(n)$ est construite ligne par ligne.
On sait que sa première ligne ne comporte que des 1 puisque $\forall k \in [\![1;n]\!]$: $q(1,k) = Card(Q(1,k)) = 1$ d'après la question 4)a)i).
Le coefficient $q(l,k)$ d'une ligne l et d'une colonne k données se détermine à l'aide d'une ligne précédemment construite ou d'un coefficient situé sur la ligne l et sur une colonne de numéro $< k$.

```
(1) def qmatrix(n):
(2)     q=np.ones(shape=(n,n))
(3)     for L in range(1,n):
(4)         for K in range(1,n):
(5)             if K<L:
(6)                q[L,K]=q[K,K]
(7)             if K==L:
(8)                 q[L,K]=q[L-1,K]+1
(9)             if K>L:
(10)               q[L,K]=q[L-1,K]+q[L,K-L-1]
(11)   return q
```

Les instructions manquantes sont :

(6)q[L,K]=q[K,K].

En effet, d'après la question 4)a)ii), on a pour tout L>K : q(L,K)=p(K)=q(K,K).

(8)q[L,K]=q[L-1,K]+1.

Cela résulte de la question 4)c)ii).

5)b)On a $p(n) = q(n,n)$, on complète donc la fonction précédente avec le script suivant :

```
n=int(input("entrer n"))
print(qmatrix(n)[n-1,n-1])
```

5)c)La deuxième ligne de $qmatrix(9)$ donnent les valeurs de $q(2,k)$ pour $k \in [\![1;9]\!]$.
On a $q(2,1)=1$, $q(2,2)=q(2,3)=2$, $q(2,4)=q(2,5)=3$, etc...
On peut conjecturer que $\forall k \geq 1 : q(2,k) = \left\lfloor \dfrac{k+2}{2} \right\rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

On le montre par récurrence.

Soit $\mathscr{P}(k)$, la proposition : « $q(2,k) = \left\lfloor \dfrac{k+2}{2} \right\rfloor$ ».

$\mathscr{P}(1)$ et $\mathscr{P}(2)$ sont vraies.
Soit $k \geq 2$ un entier. Supposons $\mathscr{P}(k-1)$ et $\mathscr{P}(k)$ vraies.
L'égalité de la question 4)c) appliquée avec $l \to 2$ et $k \to k+1$ donne :

$q(2,k+1)$
$= q(1,k+1) + q(2,k-1)$
$= 1 + q(2,k-1)$
$= 1 + \left\lfloor \dfrac{(k-1)+2}{2} \right\rfloor$ par hypothèse de récurrence
$= \left\lfloor \dfrac{k+3}{2} \right\rfloor$.

On conclut que $\forall k \geq 1 : q(2,k) = \left\lfloor \dfrac{k+2}{2} \right\rfloor$.

Problème HEC 2018

I)a)i)Si X_1 et X_2 sont indépendantes, on a $cov(X_1, X_2) = 0$ donc $r = 0$.

On a : $V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$ par indépendance

$= \sum_{k=1}^{n} p(1-p)$

$= np(1-p)$.

Comme pour tout $k \in [\![1; n]\!]$: $X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1, p)$ et que X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes, on sait d'après le cours que

$\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(1 + ... + 1, p) = \mathscr{B}(n, p)$.

1)a)ii)On a $r = \dfrac{cov(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \dfrac{cov(X_1, X_1)}{\sqrt{V(X_1)V(X_1)}} = \dfrac{V(X_1)}{\sqrt{V(X_1)V(X_1)}} = 1$.

Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$: $X_k = X_1$.

Donc $V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = V(nX_1) = n^2 V(X_1) = n^2 p(1-p)$.

On a : $\sum_{k=1}^{n} X_k = nX_1$ et $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$ donc $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)(\Omega) = \{0; n\}$.

Enfin, la loi de $\sum_{k=1}^{n} X_k$ est donnée par :

$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\right) = P(X_1 = 0) = 1 - p$ et $P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = n\right) = p$.

1)b)On a : $V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{k} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq j < l \leq k} cov(X_j, X_l)$ (formule hors programme !)

$= \sum_{i=1}^{k} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq j < l \leq k} r\sqrt{V(X_j V(X_l)}$

$= \sum_{i=1}^{k} p(1-p) + 2r \sum_{1 \leq j < l \leq k} p(1-p)$.

Dans la somme double, il y a $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ couples d'indices (j, l) tels que

$1 \leq j < l \leq k$.

On a donc $V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = kp(1-p) + 2r\dfrac{k(k-1)}{2}p(1-p)$.

Soit, $V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = kp(1-p)[1+(k-1)r]$.

1)c)Une variance est toujours positive ou nulle.

On a donc $\forall k \in [\![1;n]\!] : kp(1-p)[1+(k-1)r] \geq 0$ d'où $r \geq -\dfrac{1}{k-1}$.

En particulier, si $k = n$, on obtient : $r \geq -\dfrac{1}{n-1}$.

2)a)On a : $cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = E(X_1X_2) - p^2$.

Le théorème de transfert donne :

$E(X_1X_2) = \displaystyle\sum_{(x_1,x_2)\in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)} x_1x_2P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2)$

$= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$, les trois autres termes de la somme étant nuls.

Ainsi, $cov(X_1, X_2) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) - p^2$.

Il en résulte que $r = -1$

$\iff cov(X_1, X_2) = -\sqrt{V(X_1)V(X_2)}$

$\iff P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) - p^2 = -p(1-p)$

$\iff P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = p(2p-1)$.

2)b)On a : $P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0)$

$= P\left(\overline{\overline{X_1 = 0} \cup \overline{X_2 = 0}}\right)$

$= P\left(\overline{X_1 = 1 \cup X_2 = 1}\right)$

$= 1 - P(X_1 = 1 \cup X_2 = 1)$

$= 1 - [P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1) - P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)]$

$= 1 - [p + p - p(2p-1)]$

$= 2p^2 - 3p + 1$.

2)c)Il s'agit de prouver que $r = -1 \iff p = 1/2$ *et* $P(X_1 + X_2 = 1) = 1$.

Supposons que $r = -1$.

D'après les questions 2)a) et 2)b), on a :

$P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = p(2p-1)$ et $P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = 2p^2 - 3p + 1$.

Une probabilité étant toujours positive, cela entraîne que

$p(2p-1) \geq 0$ et $2p^2 - 3p + 1 = (p-1)(2p-1) \geq 0$.

Ces deux inégalités mènent à $2p - 1 \geq 0$ et $2p - 1 \leq 0$ donc à $p = 1/2$.

On a alors $P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = 0$.

On déduit : $P(X_1 + X_2 = 1)$

$= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$

$= 1 - [P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)]$
$= 1.$

Réciproquement, supposons que $p = 1/2$ et $P(X_1 + X_2 = 1) = 1$.
On vérifie alors aisément que $P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = p(2p - 1)$.
Et on a alors $r = -1$ d'après la question 2)a).

3)a)L'hypothèse $P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\right) = 1$ de l'énoncé signifie que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k$ est certaine et égale à 1.

On a donc $E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 1$, soit :

$\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 1$, c'est-à-dire $np = 1$ d'où $p = \frac{1}{n}$.

On a aussi : $V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 0$, soit :

$np(1-p)[1 + (n-1)r] = 0$, ce qui donne $r = -\frac{1}{n-1}$.

3)b)Distinguons deux cas.

• $\sum_{k=1}^{n} x_k \neq 1$.

Soit $\omega \in \bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k)$. On a alors $\forall k \in [\![1; n]\!] : X_k(\omega) = x_k$,

puis $\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k \neq 1$. Donc $\omega \in \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \neq 1\right)$.

On vient de montrer que $\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k) \subset \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \neq 1\right)$.

Donc $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k)\right) \leq P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \neq 1\right) = 0$.

Donc $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k)\right) = 0$.

• $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

Il existe alors un unique $i \in [\![1; n]\!]$ tel que $x_i = 1$ et tel que $\forall k \neq i : x_k = 0$.

On a alors : $P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k = x_k)\right)$
$= P\left(X_i = 1 \cap \left(\bigcap_{k=1 \ et \ k\neq i}^{n}(X_k = 0)\right)\right)$
$= P\left(X_i = 1 \cap \left(\sum_{k=1 \ et \ k\neq i}^{n}(X_k = 0)\right)\right)$
$= P\left(X_i = 1 \cap \left(\sum_{k=1}^{n}(X_k = 1)\right)\right)$
$= P(X_i = 1)$ car $\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k = 1)\right)$ est un événement certain
$= p$
$= \dfrac{1}{n}$.
II)4)a)La fonction $t \mapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
La fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est continue sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$, éventuellement non définie en 0 (si $x < 1$).
La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est donc continue sur $\left]0; \frac{1}{2}\right]$, éventuellement non définie en 0.
Aussi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ est potentiellement impropre en 0.
On a $\lim\limits_{t\to 0}(1-t)^{y-1} = 1$ donc $(1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} 1$.
Donc $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$.
Les intégrales $\displaystyle\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{1/2} t^{x-1}\mathrm{d}t$ ont donc même nature d'après le critère d'équivalence sur les intégrales impropres de fonctions positives.
Ainsi, $\displaystyle\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ converge
$\iff \displaystyle\int_0^{1/2} t^{x-1}\mathrm{d}t$ converge
$\iff \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1-x}}\mathrm{d}t$ converge
$\iff 1 - x < 1$
$\iff x > 0$.
4)b)Dans l'intégrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1-\epsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$, effectuons le changement de variable $u = 1 - t \iff t = 1 - u$.

Il est licite car $u \mapsto 1-u$ est de classe C^1 et donne :
$$\int_{1/2}^{1-\epsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{\epsilon}(1-u)^{x-1}u^{y-1}(-1)\mathrm{d}u = \int_{\epsilon}^{1/2} u^{y-1}(1-u)^{x-1}\mathrm{d}u.$$
Donc $\displaystyle\int_{1/2}^{1-\epsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \int_{\epsilon}^{1/2} t^{y-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t$.

4)c) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ converge

$\displaystyle\iff \lim_{z\to 1_-}\int_{1/2}^{z} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ est finie

$\displaystyle\iff \lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{1/2}^{1-\epsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ est finie

$\displaystyle\iff \lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{\epsilon}^{1/2} t^{y-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t$ est finie (grâce à 4)b))

$\displaystyle\iff \int_{1/2}^{1\epsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ converge

$\iff y > 0$ (grâce à 4)a)).

Enfin, $\displaystyle\int_{0}^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ converge $\iff x > 0$ (grâce à 4)a)).

On conclut que $\displaystyle\int_{0}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ converge $\iff x > 0$ *et* $y > 0$.

5)a)L'intégration par parties n'étant pas autorisée sur les intégrales impropres, on va l'effectuer sur $\displaystyle\int_{a}^{1/2} t^{x}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ avec $a \in]0;1/2]$, puis sur $\displaystyle\int_{1/2}^{b} t^{x}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ avec $b \in [1/2;1[$.

Dans la première intégrale, on pose :

$u(t) = t^x \qquad\qquad v'(t) = (1-t)^{y-1}$

$u'(t) = xt^{x-1} \qquad\qquad v(t) = -\dfrac{(1-t)^y}{y}.$

u et v sont de classe C^1 sur $[a;1/2]$.

L'intégration par parties est licite et donne :
$$\int_{a}^{1/2} t^{x}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$
$$= \left[-\frac{t^x(1-t)^y}{y}\right]_a^{1/2} - \int_a^{1/2} -\frac{x}{y}t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{(1/2)^{x+y}}{y} + \frac{a^x(1-a)^y}{y} + \frac{x}{y}\int_a^{1/2} t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t.$$
Par passage à la limite quand $a \to 0_+$, on obtient :

$$\int_0^{1/2} t^x(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = -\frac{(1/2)^{x+y}}{y} + \frac{x}{y}\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t \qquad (1)$$

En faisant le même type d'intégration par parties pour la deuxième intégrale, on obtient :

$$\int_{1/2}^{b} t^x(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \frac{(1/2)^{x+y}}{y} - \frac{b^x(1-b)^y}{y} + \frac{x}{y}\int_{1/2}^{b} t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t,$$

Puis, par passage à la limite quand $b \to 1_-$:

$$\int_{1/2}^{1} t^x(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \frac{(1/2)^{x+y}}{y} + \frac{x}{y}\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t \qquad (2)$$

Par somme de (1) et (2), on a par la relation de Chasles :

$$\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t$$

Soit, $B(x+1,y) = \dfrac{x}{y} \times B(x,y+1)$.

5)b)On a : $B(x,y+1)$

$= \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t$

$= \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\mathrm{d}t$

$= \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t - \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$

$= B(x,y) - B(x+1,y)$

$= B(x,y) - \dfrac{x}{y} \times B(x,y+1)$.

On déduit : $B(x,y+1) = \dfrac{y}{x+y} \times B(x,y)$.

6)• Montrons par récurrence sur l que $\forall l \geq 0 : B(x,y+l) = \dfrac{(y)^{[l]}}{(x+y)^{[l]}}B(x,y)$.

Pour $l=0$, c'est vrai car $(y)^{[0]} = 1$ et $(x+y)^{[0]} = 1$.

Soit $l \geq 0$ un entier. Supposons $\mathscr{P}(l)$ vraie.

On a : $B(x,y+l+1)$

$= \dfrac{y+l}{x+y+l}B(x,y+l)$ en appliquant 5)b) avec $y \mapsto y+l$.

$= \dfrac{y+l}{x+y+l} \times \dfrac{(y)^{[l]}}{(x+y)^{[l]}}B(x,y)$ par hypothèse de récurrence

$= \dfrac{(y)^{[l+1]}}{(x+y)^{[l+1]}}B(x,y)$ par procédé de construction de la suite $\big((z)^{[l]}\big)$.

Donc $\mathscr{P}(l+1)$ est vraie.

On a donc établi que $\forall l \geq 0 : B(x,y+l) = \dfrac{(y)^{[l]}}{(x+y)^{[l]}}B(x,y)$.

• Montrons par récurrence que $\forall k \geq 0$, la proposition $\mathscr{P}(k)$:
« $\forall l \geq k : B(x+k, y+l-k) = \dfrac{(x)^{[k]}(y)^{[l-k]}}{(x+y)^{[l]}} B(x,y)$ » est vraie.
$\mathscr{P}(0)$ est vraie d'après la première récurrence.
Soit $k \geq 0$ un entier et soit $l \geq k+1$ un entier. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie.
On a : $B(x+(k+1), y+l-(k+1))$
$= B(x+k+1, y+l-k-1)$
$= \dfrac{x+k}{y+l-k-1} B(x+k, y+l-k)$ par 5)a) avec $x \mapsto x+k$ et $y \mapsto y+l-k-1$
$= \dfrac{x+k}{y+l-k-1} \times \dfrac{(x)^{[k]}(y)^{[l-k]}}{(x+y)^{[l]}} B(x,y)$ par hypothèse de récurrence
$= \dfrac{(x)^{[k+1]}(y)^{[l-k-1]}}{(x+y)^{[l]}} B(x,y)$ par construction des suites $\left((x)^{[k]}\right)$ et $\left((y)^{[m]}\right)$.
Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On a donc établi que $\forall k \geq 0, \forall l \geq k : B(x+k, y+l-k) = \dfrac{(x)^{[k]}(y)^{[l-k]}}{(x+y)^{[l]}} B(x,y)$.

7)a)On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]}(b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B(a+k, b+n-k)}{B(a,b)} \text{ grâce à 6) avec } x \mapsto a,\ y \mapsto b \text{ et } l \mapsto n$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 t^{a+k-1}(1-t)^{b+n-k-1} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{a+k-1}(1-t)^{b+n-k-1} \right) \mathrm{d}t \text{ (par linéarité de l'intégrale)}$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \right) \mathrm{d}t.$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} = [t+(1-t)]^n = 1$ par la formule du binôme.

On déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \mathrm{d}t = 1.$

7)b)Soit $S \hookrightarrow \mathscr{B}(n,1,1)$.
On a alors $S(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et $\forall k \in [\![0;n]\!] : P(S=k) = \dbinom{n}{k} \dfrac{(1)^{[k]}(1)^{[n-k]}}{(2)^{[n]}}$.

Avec $(1)^{[k]} = k!$ et $(1)^{[n-k]} = (n-k)!$
Quant à la suite $\left((2)^{[n]}\right)$, elle est construite par $\forall n \in \mathbf{N}$:
$(2)^{[n+1]} = (2+n)2^{[n]}$, ce qui donne $2^{[n]} = (n+1)!$
On déduit : $P(S=k) = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} \times \dfrac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$.
Ainsi, $= \mathscr{B}(n,1,1) = \mathscr{U}(\llbracket 0;n \rrbracket)$.

$$\checkmark\ \forall z \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N} : (z)^{[n]} = z(z+1)...(z+n-1).$$

7)c)Soit $S \hookrightarrow \mathscr{B}(n,a,b)$.
On a : $E(S)$
$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(S=k)$
$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]}(b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$
$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \frac{B(a+k,b+n-k)}{B(a,b)}$ grâce à 6) avec $x \mapsto a$, $y \mapsto b$ et $l \mapsto n$.
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \frac{B(a+k,b+n-k)}{B(a,b)}$.
Or, $k\dbinom{n}{k} = k\dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{(n-1)!n}{(n-k)!(k-1)!} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$.
On déduit : $E(S)$
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} \frac{B(a+k,b+n-k)}{B(a,b)}$
$= \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} n \binom{n-1}{j} \frac{B(a+j+1,b+n-j-1)}{B(a,b)}$ en posant $j = k-1$
$= \displaystyle\frac{n}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \int_0^1 t^{a+j}(1-t)^{b+n-j-2}\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\frac{n}{B(a,b)} \int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^{a+j}(1-t)^{b+n-j-2} \right) \mathrm{d}t$
$= \displaystyle\frac{n}{B(a,b)} \int_0^1 t^a(1-t)^{b-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^j(1-t)^{n-1-j} \right) \mathrm{d}t.$
Or, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^j(1-t)^{n-1-j} = [t+(1-t)]^{n-1} = 1.$

Donc $E(S) = \dfrac{n}{B(a,b)} \displaystyle\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t = \dfrac{n}{B(a,b)} \times B(a+1,b)$.
Enfin, $B(a+1,b)$
$= \dfrac{a}{b} \times B(a,b+1)$ grâce à 5)a) avec $x \mapsto a$ et $y \mapsto b$
$= \dfrac{a}{b} \times \left[\dfrac{b}{a+b} \times B(a,b)\right]$ grâce à 5)a) avec $x \mapsto a$ et $y \mapsto b$
$= \dfrac{a}{a+b} \times B(a,b)$.
On conclut que $E(S) = \dfrac{na}{a+b}$.
III)8)a)Comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0;1\}$, on peut dire que X_1 et X_2 suivent une loi de Bernoulli.
Il reste à vérifier qu'elles ont le même paramètre, c'est-à-dire que $P(X_1 = 1) = P(X_2 = 1)$.
Compte-tenu de l'énoncé et de la question 6), on a :

$$P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = \frac{B(a+1,b+1)}{B(a,b)} = \frac{(a)^{[1]}(b)^{[1]}}{(a+b)^{[2]}} = \frac{ab}{(a+b)(a+b+1)}$$

$$P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \frac{B(a+2,b)}{B(a,b)} = \frac{(a)^{[2]}(b)^{[0]}}{(a+b)^{[2]}} = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$$

$$P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \frac{B(a,b+2)}{B(a,b)} = \frac{(a)^{[0]}(b)^{[2]}}{(a+b)^{[2]}} = \frac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)}$$

$$P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = \frac{B(a+1,b+1)}{B(a,b)} = \frac{(a)^{[1]}(b)^{[1]}}{(a+b)^{[2]}} = \frac{ab}{(a+b)(a+b+1)}.$$

On déduit : $P(X_1 = 1)$
$= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$
$= \dfrac{ab + a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$
$= \dfrac{a}{a+b}$.
Et, $P(X_2 = 1)$
$= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$
$= \dfrac{ab + a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$.
$= \dfrac{a}{a+b}$.
On a donc $P(X_1 = 1) = P(X_2 = 1)$.
8)b)On a $(X_1 + X_2)(\Omega) = \{0,1,2\}$.

$$P(X_1 + X_2 = 0) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \frac{(a)^{[0]}(b)^{[2]}}{(a+b)^{[2]}} = \binom{2}{0} \frac{(a)^{[0]}(b)^{[2]}}{(a+b)^{[2]}}$$

$P(X_1 + X_2 = 1) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$
$= 2\dfrac{(a)^{[1]}(b)^{[1]}}{(a+b)^{[2]}} = \dbinom{2}{1}\dfrac{(a)^{[1]}(b)^{[1]}}{(a+b)^{[2]}}$
$P(X_1 + X_2 = 2) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \dfrac{(a)^{[2]}(b)^{[0]}}{(a+b)^{[2]}} = \dbinom{2}{2}\dfrac{(a)^{[2]}(b)^{[0]}}{(a+b)^{[2]}}.$
On conclut que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(2, a, b)$.
8)c)On a : $P_{(X_1=1)}(X_2 = 1)$
$= \dfrac{P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)}{P(X_1 = 1)}$
$= \dfrac{\dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}}{\dfrac{a}{a+b}}$
$= \dfrac{a+1}{a+b+1}.$

9)a)La commande $rd.random()$ renvoie un réel aléatoire entre 0 et 1.
$u = (a+b) * rd.random()$ renvoie donc un réel aléatoire entre 0 et $a+b$.
La variable u simulée par la ligne (3) suit donc une loi uniforme à densité sur $[0, a+b]$.
9)b)programme :

```
(1) def randbetabin(a,b):
(2)     x=np.zeros(shape=(1,2))
(3)     u=(a+b)*rd.random()
(4)     v=(a+b+1)*rd.random()
(5)     if u<a:
(6)         x[0,0]=1
(7)         if v<a+1:
(8)             x[0,1]=1
(9)     if u>=a:
(10)        x[0,0]=0
(11)        if v<a:
(12)            x[0,1]=1
(13)    return x
```

On sait que $P(X_1 = 1) = \dfrac{a}{a+b}$.
En tirant un réel aléatoire u entre 0 et $a+b$, la probabilité qu'il soit inférieur à a vaut $\dfrac{a}{a+b}$, d'où la ligne (5).
On sait par ailleurs que $P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \dfrac{a+1}{a+b+1}$.
Supposons $(X_1 = 1)$ réalisé, c'est-à-dire $u < a$.

En tirant un réel aléatoire v entre 0 et $a+b+1$, la probabilité qu'il soit inférieur à $a+1$ vaut $\dfrac{a+1}{a+b+1}$, d'où la ligne (7).

Enfin, on a :

$$P_{(X_1=0)}(X_2=1)=\frac{P(X_1=0\cap X_2=1)}{P(X_1=0)}=\frac{\dfrac{ab}{(a+b)(a+b+1)}}{\dfrac{b}{a+b}}=\frac{a}{a+b+1}.$$

Supposons $(X_1=0)$ réalisé, c'est-à-dire $u\geq a$.
En tirant un réel aléatoire v entre 0 et $a+b+1$, la probabilité qu'il soit inférieur à a vaut $\dfrac{a}{a+b+1}$, d'où la ligne (11).

10)a)On a : $cov(X_1,X_2)$

$=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)$

$=P(X_1=1\cap X_2=1)-P(X_1=1)P(X_2=1)$

$=\dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}-\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2$

$=\dfrac{a(a+1)(a+b)-a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)}$

$=\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$

De plus, $V(X_1)=V(X_2)=\dfrac{a}{a+b}\left(1-\dfrac{a}{a+b}\right)=\dfrac{ab}{(a+b)^2}.$

Le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2 vaut :

$$r(X_1,X_2)=\frac{cov(X_1,X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}}=\frac{\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}{\dfrac{ab}{(a+b)^2}}=\frac{1}{a+b+1}.$$

10)b)Il faut déterminer a et b de sorte que $r=\dfrac{1}{a+b+1}$ et $p=\dfrac{a}{a+b}$.

Cela nous amène à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} r=\dfrac{1}{a+b+1}\\[2ex] p=\dfrac{a}{a+b}\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a+b=\dfrac{1}{r}-1\\[2ex] (p-1)a+pb=0\end{array}\right..$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{p(1-r)}{r} \\ \\ b = \dfrac{(1-p)(1-r)}{r} \end{cases}$$

D'où le script ci-dessous :

```
p=float(input("entrer p"))
r=float(input("entrer r"))
a=(p*(1-r))/r
b=((1-p)*(1-r))/r
print(randbetabin(a,b))
```