**Essec II 2018**

Partie I

1)a)A l'instant $t$, un nombre (cumulé) $D(t)$ d'oeufs sont en diapause.
Puis, $N(t)$ oeufs sont pondus. une proportion $p(t)$ de ces oeufs pondus entrent en diapause, ce qui représente un accroissement de $p(t)N(t)$ oeufs en diapause qui vont se joindre aux $D(t)$ déjà présents.
A l'instant $t+1$, le nombre d'oeufs en diapause vaut donc $D(t)+p(t)N(t)$.
Ainsi, $D(t+1)=D(t)+p(t)N(t)$.

1)b)A l'instant $t$, une proportion $p(t)$ des $N(t)$ oeufs pondus entrent en diapause. Donc une proportion $1-p(t)$ des $N(t)$ oeufs pondus vont éclore donnant naissance à $(1-p(t))\,N(t)$ insectes.
Chacun de ces insectes produit en moyenne $\alpha$ oeufs.
A l'instant $t+1$, ces insectes produisent $\alpha\,(1-p(t))\,N(t)$ oeufs et meurent.
Donc $N(t+1)=\alpha\,(1-p(t))\,N(t)$.

2)a)Pour tout $t\in[\![0,T-1]\!]$, on a : $0\leq p(t)\leq 1$.
Donc $0\leq 1-p(t)\leq 1$, puis $0\leq \alpha\,(1-p(t))\leq \alpha$.
Par hypothèse, $\alpha\leq 1$ donc $\alpha\,(1-p(t))\leq 1$.
Compte tenu de la question 1)b), on déduit que $N(t+1)\leq N(t)$.

2)b)Compte tenu de la question 1), on a pour tout $t\in[\![0,T-1]\!]$ :

$$\begin{aligned}D(t+1)+N(t+1)&=D(t)+p(t)N(t)+\alpha\,(1-p(t))\,N(t)\\&=D(t)+[p(t)+\alpha\,(1-p(t))]\,N(t)\quad(*)\end{aligned}$$

$\alpha\leq 1$ donc $\alpha\,(1-p(t))\leq 1-p(t)$, puis $p(t)+\alpha\,(1-p(t))\leq p(t)+1-p(t)$, c'est-à-dire $p(t)+\alpha\,(1-p(t))\leq 1$.
Donc $[p(t)+\alpha\,(1-p(t))]\,N(t)\leq N(t)$, puis en ajoutant $D(t)$ dans chaque membre :
$D(t)+[p(t)+\alpha\,(1-p(t))]\,N(t)\leq D(t)+N(t)$.
En reportant dans $(*)$, on conclut que $D(t+1)+N(t+1)\leq D(t)+N(t)$.

2)c)La suite $(D(t)+N(t))_{0\leq t\leq T}$ est décroissante grâce à la question 2)b).
Son premier terme vaut $D(0)+N(0)=N(0)$ car par convention, $D(0)=0$.
Donc $\forall t\in[\![0,T]\!], D(t)+N(t)\leq N(0)$.

2)d)$\forall t\in[\![0,T]\!], N(t)\geq 0$ donc $D(t)\leq D(t)+N(t)$.
Or, d'après la question 2)c), $D(t)+N(t)\leq N(0)$.
Par recollement d'inégalités, on a donc $\forall t\in[\![0,T]\!], D(t)\leq N(0)$.

2)e)i)Montrons par récurrence que la proposition $\mathscr{P}(t)$ : $\ll$ $N(t)=0$ $\gg$ est vraie pour tout $t\in[\![1,T]\!]$.

La question 1)b) donne pour $t=0$ : $N(1)=\alpha(1-p(0))N(0)$.
Comme par hypothèse, $p(0)=1$, on a alors $N(1)=0$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Soit $t \in [\![1,T]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(t)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(t+1)$ est vraie.
La question 1)b) donne : $N(t+1) = \alpha\,(1-p(t))\,N(t)$, puis $N(t+1) = 0$ car par hypothèse de récurrence, $N(t) = 0$. Donc $\mathscr{P}(t+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall t \in [\![1,T]\!], N(t) = 0$.

✓ Ce résultat est logique. Si $p(0) = 1$, cela signifie qu'au début de la saison (instant 0), les insectes ont pondu des oeufs dont la totalité sont entrés en diapause. Aucun de ces oeufs pondus n'éclorera dans la saison. A l'instant 1, les insectes meurent tous et aucun nouvel insecte ne sera là pour pondre de nouveaux oeufs.

2)e)ii)On vient de voir que $\forall t \in [\![1,T]\!], N(t) = 0$.
Grâce à la question 1)a), on déduit que $\forall t \in [\![1,T-1]\!], D(t+1) = D(t)$.
La suite $(D(t))_{1\leq t\leq T}$ est donc constante.
Or, $D(1) = D(0) + p(0)N(0) = 0 + 1 \times N(0) = N(0)$.

Ainsi, $\forall t \in [\![1,T]\!], D(t) = N(0)$.

✓ Logique. Si $p(0) = 1$, les $N(0)$ oeufs pondus à l'instant 0 sont tous entrés en diapause. Jusqu'à la fin de la saison, il n'y aura que ces oeufs là en diapause puisqu'à partir de l'instant 1, il n'y a plus d'insectes donc plus de pontes.

2)e)iii)Quand $\alpha \leq 1$, la question 2)d) montre qu'à la fin de la saison, on a : $D(T) \leq N(0)$.
Dans le cas particulier où $p(0) = 1$, la question 2)e)ii) donne $D(T) = N(0)$.
La meilleure stratégie pour les insectes est celle qui permet d'accumuler le maximum d'oeufs en diapause à la fin de la saison, ce qui se produit quand $p(0) = 1$, c'est-à-dire quand les $N(0)$ oeufs produits à l'instant 0 entrent en diapause.

3)a)Pour tout $t \in [\![1,T]\!]$, on a : $(\tau = t) \subset (\tau \leq t)$ donc $P(\tau = t) \leq P(\tau \leq t)$.
Comme par hypothèse, $P(\tau = t) > 0$, on a donc $P(\tau \leq t) > 0$.

3)b)$H(t) = P_{(\tau\geq t)}(\tau = t) = \dfrac{P\big((\tau = t) \cap (\tau \geq t)\big)}{P(\tau \geq t)}$.

Comme $(\tau = t) \subset (\tau \leq t)$, on a $(\tau = t) \cap (\tau \geq t) = (\tau = t)$.

Ainsi, $H(t) = \dfrac{P(\tau = t)}{P(\tau \geq t)}$.

3)c)On déduit : $H(T) = \dfrac{P(\tau = T)}{P(\tau \geq T)}$.

Or, $\tau(\Omega) = [\![1,T]\!]$ donc $(\tau \geq T) = (\tau = T)$.

Donc $H(T) = \dfrac{P(\tau = T)}{P(\tau = T)} = 1$.

3)d)Supposons que $\tau$ suive une loi uniforme sur $[\![1,T]\!]$.

Alors, $\forall t \in [\![1,T]\!], P(\tau = t) = \dfrac{1}{T}$.

Pour tout $t \in [\![1,T]\!]$, on a : $P(\tau \geq t) = \displaystyle\sum_{k=t}^{T} P(\tau = k) = \sum_{k=t}^{T} \frac{1}{T} = \frac{T-t+1}{T}$.

On déduit : $H(t) = \dfrac{\frac{1}{T}}{\frac{T-t+1}{T}} = \dfrac{1}{T-t+1}$.

3)e)i)Par hypothèse, on a : $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_T$ donc $\forall i \in [\![1,T]\!], q_i > 0$.

De plus, $\displaystyle\sum_{i=1}^{T} q_i = \sum_{i=1}^{T} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) = \lambda_T - \lambda_0$ par télescopage.

Comme $\lambda_T = 1$ et $\lambda_0 = 0$, on déduit : $\displaystyle\sum_{i=1}^{T} q_i = 1$.

Donc $(q_i)_{1 \leq i \leq T}$ définit bien une loi de probabilité sur $[\![1,T]\!]$.

3)e)ii)Supposons que $\tau$ suive la loi ci-dessus.
On a alors $\forall t \in [\![1,T]\!], P(\tau = t) = q_t = \lambda_t - \lambda_{t-1}$.

On déduit $P(\tau \geq t) = \displaystyle\sum_{i=t}^{T} P(\tau = i) = \sum_{i=t}^{T} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) = \lambda_T - \lambda_{t-1}$.

D'où $H(t) = \dfrac{P(\tau = t)}{P(\tau \geq t)} = \dfrac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{\lambda_T - \lambda_{t-1}} = \dfrac{\lambda_t - \lambda_{t-1}}{1 - \lambda_{t-1}}$.

3)e)iii)$\forall t \in [\![1,T-1]\!], \dfrac{H(t+1)}{H(t)} = \dfrac{\lambda_{t+1} - \lambda_t}{\lambda_t - \lambda_{t-1}} \times \dfrac{1 - \lambda_{t-1}}{1 - \lambda_t} \quad (*)$

Par hypothèse, on a : $\lambda_{t+1} - \lambda_t \geq \lambda_t - \lambda_{t-1} \geq 0$. Donc $\dfrac{\lambda_{t+1} - \lambda_t}{\lambda_t - \lambda_{t-1}} \geq 1 \quad (**)$

Par ailleurs, on a : $\lambda_t \geq \lambda_{t-1}$ donc $1 - \lambda_t \leq 1 - \lambda_{t-1}$.
En divisant par $1 - \lambda_t > 0$, on a : $\dfrac{1 - \lambda_{t-1}}{1 - \lambda_t} \geq 1 \quad (***)$

De $(*)$, $(**)$ et $(***)$, on déduit : $\dfrac{H(t+1)}{H(t)} \geq 1$, ce qui donne en multipliant par $H(t) > 0$ : $H(t+1) \geq H(t)$.

Donc $t \mapsto H(t)$ est croissante sur $[\![1,T]\!]$.

4)a)i)Comme $\tau(\Omega) = \{1,2\}$, l'événement $(\tau \geq 1)$ est certain.
Donc $P(\tau \geq 1) = 1$.
On déduit : $H(1) = \dfrac{P(\tau = 1)}{P(\tau \geq 1)} = P(\tau = 1)$.

Par hypothèse, $H(1) = \dfrac{1}{2}$ donc $P(\tau = 1) = \dfrac{1}{2}$.

4)a)ii)On déduit : $P(\tau = 2) = 1 - P(\tau = 1) = \dfrac{1}{2}$.
Donc $\tau \hookrightarrow \mathscr{U}(\{1,2\})$.

4)b)D'après la question 1)a), on a : $D(2) = D(1) + p(1)N(1)$.
Si $D(1)$ et $N(1)$ sont donnés, on voit que c'est en prenant $p(1) = 1$ que $D(2)$ est maximal.

4)c)Comme $\tau$ est discrète finie, $\ln D(\tau)$ l'est également. Elle admet une espérance donnée par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(\ln D(\tau)) &= \sum_{t\in\tau(\Omega)} \ln D(t) \times P(\tau = t) \\
&= \ln D(1) \times P(\tau = 1) + \ln D(2) \times P(\tau = 2) \\
&= \frac{1}{2}\ln D(1) + \frac{1}{2}\ln D(2) \quad (*)
\end{aligned}$$

En utilisant la question 1), on a :

$D(1) = D(0) + p(0)N(0) = p(0)N(0)$ car $D(0) = 0$.

Puis, $D(2) = D(1)+p(1)N(1) = D(1)+N(1) = p(0)N(0)+4(1-p(0))N(0)$ $= (4 - 3p(0))N(0)$.

En reportant dans $(*)$, on a :

$$E(\ln D(\tau)) = \frac{1}{2}\ln\big((4-3p(0))N(0)\big) + \frac{1}{2}\ln\big(p(0)N(0)\big).$$

4)d)$\varphi$ est dérivable sur $]0, 1]$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in ]0, 1]$ :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\frac{-3\cancel{N(0)}}{(4-3x)\cancel{N(0)}} + \frac{1}{2}\frac{\cancel{N(0)}}{\cancel{N(0)}x} = \frac{-3x + (4-3x)}{2x(4-3x)} = \frac{4-6x}{2x(4-3x)}.$$

$\forall x \in ]0, 1], 2x(4 - 3x) > 0$ donc $\varphi'(x)$ est du signe de $4 - 6x$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\varphi\left(\frac{2}{3}\right)$ | $\searrow$ | $\ln N(0)$ |

4)e)$\varphi(x)$ est maximal pour $x = \dfrac{2}{3}$.

Donc $E(\ln D(\tau))$ est maximale pour $p(0) = \dfrac{2}{3}$.

Ainsi, $p^*(0) = \dfrac{2}{3}$.

Partie II

5)La question 1)a) donne : $D(1) = D(0) + p(0)N(0) = p(0)N(0) > 0$ car $N(0) > 0$ et $p(0) > 0$ par énoncé.
De plus, $\forall t \in [\![0, T-1]\!], D(t+1) - D(t) = p(t)N(t) \geq 0$ donc la suite $(D(t))_{0 \leq t \leq T}$ est croissante.
Donc $\forall t \in [\![1, T]\!], D(t) \geq D(1)$ donc $D(t) > 0$.
Comme $N(t) \geq 0$, on a donc par somme $\forall t \in [\![1, T]\!], D(t) + N(t) > 0$.
Le résultat reste vrai pour $t = 0$ puisque $D(0) = 0$ et $N(0) > 0$.

Donc $\forall t \in [\![0, T]\!], D(t) + N(t) > 0$.

6)Pour tout $t \in [\![0, T-1]\!]$, on a :

$$X(t+1) = \frac{D(t+1)}{D(t+1) + N(t+1)} = \frac{D(t) + p(t)N(t)}{D(t) + p(t)N(t) + \alpha(1-p(t))N(t)} \quad (*)$$

De plus,

$$\begin{aligned} X(t) = \frac{D(t)}{D(t)+N(t)} &\iff X(t)(D(t)+N(t)) = D(t) \\ &\iff X(t)D(t) + X(t)N(t) = D(t) \\ &\iff D(t) - X(t)D(t) = X(t)N(t) \\ &\iff D(t)(1-X(t)) = X(t)N(t) \\ &\iff D(t) = \frac{X(t)N(t)}{1-X(t)} \end{aligned}$$

En substituant dans $(*)$, on obtient :

$$\begin{aligned} X(t+1) &= \frac{\frac{X(t)N(t)}{1-X(t)} + p(t)N(t)}{\frac{X(t)N(t)}{1-X(t)} + p(t)N(t) + \alpha(1-p(t))N(t)} \\ &= \frac{X(t)N(t) + (1-X(t))p(t)N(t)}{X(t)N(t) + \big(1-X(t)\big)\big(p(t)N(t) + \alpha(1-p(t))N(t)\big)} \\ &= \frac{X(t) + (1-X(t))p(t)}{X(t) + \big(1-X(t)\big)\big(p(t) + \alpha(1-p(t))\big)} \\ &= \frac{X(t) + p(t) - X(t)p(t)}{X(t) + p(t) + \alpha(1-p(t)) - X(t)\big(p(t) + \alpha(1-p(t)\big)} \\ &= \frac{p(t) + (1-p(t))X(t)}{p(t) + \alpha(1-p(t)) + X(t)\big(1 - p(t) - \alpha(1-p(t)\big)} \\ &= \frac{p(t) + (1-p(t))X(t)}{p(t) + \alpha(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))X(t).} \end{aligned}$$

7)a)La fonction $u : x \mapsto x + (1-x)\xi$ est affine donc dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1], u'(x) = 1 - \xi$.
La fonction $v : x \mapsto x + \alpha(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi$ est affine donc dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1], v'(x) = 1 - \alpha - (1-\alpha)\xi = (1-\alpha)(1-\xi)$.

$\psi_\xi$ est dérivable sur $[0,1]$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\psi'_\xi(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\
&= \frac{(1-\xi)\big(x + \alpha(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi\big) - \big(x + (1-x)\xi\big)(1-\alpha)(1-\xi)}{\big(x + \alpha(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi\big)^2} \\
&= \frac{(1-\xi)\big(x + \alpha(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi - (x + (1-x)\xi)(1-\alpha)\big)}{\big(x + \alpha(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi\big)^2} \\
&= \frac{(1-\xi)\big(x + \alpha(1-x) + \cancel{(1-\alpha)(1-x)\xi} - x(1-\alpha) - \cancel{(1-x)\xi(1-\alpha)}\big)}{\big(x + \alpha(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi\big)^2} \\
&= \frac{(1-\xi)(x + \alpha - \alpha x - x + \alpha x)}{\big(x + \alpha(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi\big)^2} \\
&= \frac{(1-\xi)\alpha}{\big(x + \alpha(1-x) + (1-\alpha)(1-x)\xi\big)^2}.
\end{aligned}$$

$\forall x \in [0,1]\,, \psi'_\xi(x) \geq 0$ car $\xi \in [0,1]$ et $\alpha > 0$.
Donc $\psi_\xi$ est croissante sur $[0,1]$.

7)b)On a immédiatement $\psi_\xi(1) = 1$.

7)c)i)$\psi_\xi(0) = \dfrac{\xi}{\alpha + (1-\alpha)\xi}$.

7)c)ii)Pour tout $t \in [\![0, T-1]\!]$, on a : $0 < p(t) \leq 1$.
Par croissance de $\psi_\xi$ sur $[0,1]$, on déduit :

$\psi_\xi(0) \leq \psi_\xi(p(t)) \leq \psi_\xi(1)$, c'est-à-dire :

$$A(\xi) \leq \frac{p(t) + (1-p(t))\xi}{p(t) + \alpha(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))\xi} \leq 1.$$

Comme $0 \leq D(t) \leq D(t) + N(t)$, on a $0 \leq X(t) \leq 1$. Il est donc licite de prendre $\xi = X(t)$ dans les inégalités ci-dessus, ce qui donne :

$$A(X(t)) \leq \frac{p(t) + (1-p(t))X(t)}{p(t) + \alpha(1-p(t)) + (1-\alpha)(1-p(t))X(t)} \leq 1.$$

Grâce à la question 6), on déduit : $A(X(t)) \leq X(t+1) \leq 1$.

7)c)iii)Pour tout $\xi \in [0,1]$, on a : $A(\xi) = \psi_\xi(0) = \dfrac{\xi}{\alpha + (1-\alpha)\xi}$.

$A$ est dérivable sur $[0,1]$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et pour tout $\xi \in [0,1]$, on a :

$$A'(\xi) = \frac{\alpha + (1-\alpha)\xi - \xi(1-\alpha)}{\big(\alpha + (1-\alpha)\xi\big)^2} = \frac{\alpha}{\big(\alpha + (1-\alpha)\xi\big)^2} > 0.$$

Donc $A$ est croissante sur $[0,1]$.

8)Par télescopage des produits, on a :

$$D(\tau)=\frac{D(\tau)}{\cancel{D(\tau-1}}\frac{\cancel{D(\tau-1)}}{\cancel{D(\tau-2}}\cdots\frac{\cancel{D(2)}}{\cancel{D(1)}}\frac{\cancel{D(1)}}{\cancel{N(0)}}\cancel{N(0)}.$$

$$
\begin{aligned}
9)\text{a)}\ln D(\tau)&=\ln\left(\frac{D(\tau)}{D(\tau-1}\frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2}\cdots\frac{D(2)}{D(1)}\frac{D(1)}{N(0)}N(0)\right)\\
&=\ln(N(0))+\ln\left(\frac{D(\tau)}{D(\tau-1}\frac{D(\tau-1)}{D(\tau-2}\cdots\frac{D(2)}{D(1)}\frac{D(1)}{N(0)}\right)\\
&=\ln(N(0))+\ln\left(\frac{D(1)}{N(0)}\prod_{t=1}^{\tau-1}\frac{D(t+1)}{D(t)}\right)\\
&=\ln(N(0))+\ln\left(\frac{D(1)}{N(0)}\right)+\ln\left(\prod_{t=1}^{\tau-1}\frac{D(t+1)}{D(t)}\right)\\
&=\ln(N(0))+\ln\left(\frac{D(1)}{N(0)}\right)+\sum_{t=1}^{\tau-1}\ln\left(\frac{D(t+1)}{D(t)}\right)\\
&=\ln(N(0))+\hat{R}(0)+\sum_{t=1}^{\tau-1}\hat{R}(t).
\end{aligned}
$$

Par linéarité de l'espérance, on déduit :

$$E\big(\ln D(\tau)\big)=\ln(N(0))+E\left(\hat{R}(0)+\sum_{t=1}^{\tau-1}\hat{R}(t)\right).$$

9)b)$D(1)=D(0)+p(0)N(0)=p(0)N(0)$ car $D(0)=0$.

Donc $\dfrac{D(1)}{N(0)}=p(0)$.

Par ailleurs,
$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)}&=\frac{\alpha\frac{D(1)}{D(1)+N(1)}}{1+(\alpha-1)\frac{D(1)}{D(1)+N(1)}}\\
&=\frac{\alpha D(1)}{D(1)+N(1)+(\alpha-1)D(1)}\\
&=\frac{\alpha D(1)}{\alpha D(1)+N(1)}\\
&=\frac{\alpha p(0)N(0)}{\alpha p(0)N(0)+\alpha(1-p(0))N(0)}\\
&=p(0).
\end{aligned}
$$

Donc $\dfrac{D(1)}{N(0)}=\dfrac{\alpha X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)}$.

9)c)Les égalités $N(t+1)=\alpha(1-p(t))N(t)$ et $D(t+1)=D(t)+p(t)N(t)$ vont permettre par combinaison linéaire d'éliminer $p(t)$ :

$N(t+1)+\alpha D(t+1)=\alpha\left(D(t)+N(t)\right)$.

En divisant membre à membre cette égalité par $D(t)D(t+1)$, on a :

$$\frac{N(t+1)+\alpha D(t+1)}{D(t)D(t+1)} = \frac{\alpha\,(D(t)+N(t))}{D(t)D(t+1)}$$

$$\frac{1}{D(t)}\left(\frac{N(t+1)}{D(t+1)}+\alpha\right) = \frac{\alpha}{D(t+1)}\left(\frac{N(t)}{D(t)}+1\right) \quad (*)$$

Par ailleurs, $X(t) = \dfrac{D(t)}{D(t)+N(t)} \iff X(t)D(t)+X(t)N(t) = D(t)$

$\iff D(t)(1-X(t)) = X(t)N(t) \iff \dfrac{N(t)}{D(t)} = \dfrac{1-X(t)}{X(t)}$.

En reportant dans $(*)$, on a :

$$\frac{1}{D(t)}\left(\frac{1-X(t+1)}{X(t+1)}+\alpha\right) = \frac{\alpha}{D(t+1)}\left(\frac{1-X(t)}{X(t)}+1\right)$$

$$\frac{1}{D(t)}\left(\frac{1-X(t+1)+\alpha X(t+1)}{X(t+1)}\right) = \frac{\alpha}{D(t+1)}\frac{1}{X(t)}$$

D'où $\dfrac{D(t+1)}{D(t)} = \dfrac{\alpha X(t+1)}{X(t)\,(1+(\alpha-1)X(t+1))}$.

9)d)$\hat{R}(0) = \ln\left(\dfrac{D(1)}{N(0)}\right)$

$$= \ln\left(\frac{\alpha X(1)}{1+(\alpha-1)X(1)}\right)$$

$$= \ln\alpha + \ln X(1) - \ln\left(1+(\alpha-1)X(1)\right).$$

On vérifie alors très facilement que $\hat{R}(0) = u\big(1, X(1)\big)$.

9)e)Pour tout $t \in [\![1, T-1]\!]$, on a :

$$\hat{R}(t) = \ln\left(\frac{D(t+1)}{D(t)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\alpha X(t+1)}{X(t)\,(1+(\alpha-1)X(t+1))}\right)$$

$$= \ln\alpha + \ln X(t+1) - -\ln X(t) - \ln\left(1+(\alpha-1)X(t+1)\right)$$

$$= u\big(X(t), X(t+1)\big).$$

9)f)En utilisant les questions 9)a), 9)d) et 9)e), on obtient immédiatement :

$$E\big(\ln D(\tau)\big) = \ln N(0) + E\left[u\big(1, X(1)\big) + \sum_{t=1}^{\tau-1} u\big(X(t), X(t+1)\big)\right].$$

## Partie III

10)a)$\mathbb{1}_B(\Omega) = \{0,1\}$ donc $\mathbb{1}_B$ suit une loi de Bernoulli.
Son paramètre est $P(\mathbb{1}_B = 1) = P(B)$. Ainsi, $\mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathscr{B}(P(B))$.

10)b)Soit $\omega \in \Omega$.

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 1 &\iff \omega \in B \cap C \\ &\iff \omega \in B \text{ et } \omega \in C \\ &\iff \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \text{ et } \mathbb{1}_C(\omega) = 1. \\ &\iff \mathbb{1}_B(\omega)\mathbb{1}_C(\omega) = 1 \\ &\iff (\mathbb{1}_B.\mathbb{1}_C)(\omega) = 1\end{aligned}$$

Les équivalences ci-dessus donnent $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) \neq 1 \iff (\mathbb{1}_B.\mathbb{1}_C)(\omega) \neq 1$, c'est-à-dire $\mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = 0 \iff (\mathbb{1}_B.\mathbb{1}_C)(\omega) = 0$.

On a donc $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{1}_{B\cap C}(\omega) = (\mathbb{1}_B.\mathbb{1}_C)(\omega)$, c'est-à-dire $\mathbb{1}_{B\cap C} = \big(\mathbb{1}_B.\mathbb{1}_C\big)$.

10)c)i)$E_B(Y+Z)$

$= \dfrac{1}{P(B)}E\left((Y+Z)\mathbb{1}_B\right)\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{P\left(\overline{B}\right)}E\left((Y+Z)\mathbb{1}_{\overline{B}}\right)\mathbb{1}_{\overline{B}}$

$= \dfrac{1}{P(B)}E\left(Y\mathbb{1}_B + Z\mathbb{1}_B\right)\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{P\left(\overline{B}\right)}E\left(Y\mathbb{1}_{\overline{B}} + Z\mathbb{1}_{\overline{B}}\right)\mathbb{1}_{\overline{B}}$

$= \dfrac{1}{P(B)}\left(E(Y\mathbb{1}_B) + E(Z\mathbb{1}_B)\right)\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{P\left(\overline{B}\right)}\left(E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}}) + E(Z\mathbb{1}_{\overline{B}})\right)\mathbb{1}_{\overline{B}}$

linéarité $= \dfrac{1}{P(B)}\big(E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + E(Z\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B\big) + \dfrac{1}{P\left(\overline{B}\right)}\big(E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}} + E(Z\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}\big)$

$= \dfrac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{P\left(\overline{B}\right)}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}} + \dfrac{1}{P(B)}E(Z\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{P\left(\overline{B}\right)}E(Z\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}$

$= E_B(Y) + E_B(Z)$.

10)c)ii)$E(E_B(Y))$

$= E\left(\dfrac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{P\left(\overline{B}\right)}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}\right)$

$= \dfrac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)E(\mathbb{1}_B) + \dfrac{1}{P\left(\overline{B}\right)}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})E(\mathbb{1}_{\overline{B}})$ $\quad(*)$ par linéarité.

Or, $\mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathscr{B}(P(B))$ donc $E(\mathbb{1}_B) = P(B)$. De même, $E(\mathbb{1}_{\overline{B}}) = P\left(\overline{B}\right)$.

En reportant dans $(*)$, on obtient :

$E(E_B(Y)) = E(Y\mathbb{1}_B) + E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}}) = E(Y\mathbb{1}_B + Y\mathbb{1}_{\overline{B}})$.

Montrons enfin que $Y\mathbb{1}_B + Y\mathbb{1}_{\overline{B}} = Y$.
– si $\omega \in B$, alors $Y(\omega)\mathbb{1}_B(\omega) + Y(\omega)\mathbb{1}_{\overline{B}}(\omega) = Y(w) \times 1 + Y(\omega) \times 0 = Y(\omega)$,
– si $\omega \in \overline{B}$, alors $Y(\omega)\mathbb{1}_B(\omega) + Y(\omega)\mathbb{1}_{\overline{B}}(\omega) = Y(w) \times 0 + Y(\omega) \times 1 = Y(\omega)$.
On a donc $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega)\mathbb{1}_B(\omega) + Y(\omega)\mathbb{1}_{\overline{B}}(\omega) = Y(w)$.
Ainsi, $Y\mathbb{1}_B + Y\mathbb{1}_{\overline{B}} = Y$.

On conclut que $E(E_B(Y)) = E(Y)$.

10)c)iii)$E_B(Y\mathbb{1}_B) = \dfrac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \dfrac{1}{P\left(\overline{B}\right)}E(Y\mathbb{1}_B\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}$.

Or, d'après la question 10)b), on a :

$\mathbb{1}_B\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{B\cap B} = \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_B\mathbb{1}_{\overline{B}} = \mathbb{1}_{B\cap\overline{B}} = \mathbb{1}_\emptyset = 0$.

Donc $E_B(Y\mathbb{1}_B) = \dfrac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B$.

$$\begin{aligned}
\text{Par ailleurs, } E_B(Y)\mathbb{1}_B &= \left(\frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P\left(\overline{B}\right)}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}\right)\mathbb{1}_B \\
&= \frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B\mathbb{1}_B + \frac{1}{P\left(\overline{B}\right)}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_{\overline{B}}\mathbb{1}_B \\
&= \frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P\left(\overline{B}\right)}E(Y\mathbb{1}_{\overline{B}})\mathbb{1}_\emptyset \\
&= \frac{1}{P(B)}E(Y\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B.
\end{aligned}$$

Donc $E_B(Y\mathbb{1}_B) = E_B(Y)\mathbb{1}_B$.

11)a)Pour tout $y \in \left]0,1\right]$, on a : $u(x,y) = \ln\alpha - \ln x + \ln y - \ln(1+(\alpha-1)y)$.

$\partial_2 u(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)y} = \dfrac{1+(\alpha-1)y-(\alpha-1)y}{1+(\alpha-1)y} = \dfrac{1}{1+(\alpha-1)y}$.

$\forall y \in \left]0,1\right], \partial_2 u(x,y) > 0$ car $\alpha > 1$.
La fonction $y \mapsto u(x,y)$ est donc croissante sur $\left]0,1\right]$ et atteint donc son maximum pour $y = 1$.

Ainsi, $y^*(x, T-1) = 1$.

11)b)$u(x,1) = \ln\alpha - \ln x + \ln 1 - \ln(1+(\alpha-1)\times 1) = \ln\alpha - \ln x - \ln\alpha = -\ln x$.

12)a)Distinguons trois cas :

- $\tau(\omega) = T$
Alors, $\mathbb{1}_{(\tau\geq T-1)}(\omega) = 1$ car $\tau(\omega) \geq T-1$ et $\mathbb{1}_{(\tau=T)}(\omega) = 1$ car $\tau(\omega) = T$.
Les deux membres de l'égalité valent $u(X(T-2,T-1)) + u(X(T-1,T))$.

- $\tau(\omega) = T-1$
Alors, $\mathbb{1}_{(\tau\geq T-1)}(\omega) = 1$ car $\tau(\omega) \geq T-1$ et $\mathbb{1}_{(\tau=T)}(\omega) = 0$ car $\tau(\omega) \neq T$.
Les deux membres de l'égalité valent $u(X(T-2,T-1))$.

- $\tau(\omega) < T-1$
Alors, $\mathbb{1}_{(\tau\geq T-1)}(\omega) = 0$ car $\tau(\omega) < T-1$ et $\mathbb{1}_{(\tau=T)}(\omega) = 0$ car $\tau(\omega) \neq T$.
Les deux membres de l'égalité valent 0.

Donc $\mathbb{1}_{(\tau\geq T-1)}\displaystyle\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t),X(t+1)) = \mathbb{1}_{(\tau\geq T-1)}u(X(T-2),X(T-1))$
$+ \mathbb{1}_{(\tau=T)}u(X(T-1),X(T))$.

12)b)En appliquant la question 10)c)iii) avec $B = (\tau \geq T-1)$ et
$Y = \displaystyle\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))$, on obtient :

$$\mathbb{1}_{(\tau\geq T-1)} E_{(\tau\geq T-1)}\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t),X(t+1))\right)$$
$$= \mathbb{1}_B E_B(Y)$$
$$= E_B(Y\mathbb{1}_B)$$
$$= E_B\left(\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t),X(t+1))\right)\mathbb{1}_B\right)$$
$$= E_{(\tau\geq T-1)}\left(\left(\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t),X(t+1))\right)\mathbb{1}_{(\tau\geq T-1)}\right)$$
$$= E_{(\tau\geq T-1)}\left(\mathbb{1}_{(\tau\geq T-1)}u(X(T-2),X(T-1)) + \mathbb{1}_{(\tau=T)}u(X(T-1),X(T))\right)$$
grâce à la question 12)a).

12)c)Posons $B = (\tau \geq T-1)$, $C = (\tau = T)$, $u = u(X(T-2), X(T-1))$ et $v = u(X(T-1), X(T))$.

$$E_{(\tau\geq T-1)}\left(\mathbb{1}_{(\tau\geq T-1)}u(X(T-2),X(T-1)) + \mathbb{1}_{(\tau=T)}u(X(T-1),X(T))\right)$$
$$= E_B\left(\mathbb{1}_B u + \mathbb{1}_C v\right)$$
$$= E_B\left(\mathbb{1}_B u\right) + E_B\left(\mathbb{1}_C v\right) \quad (*) \text{ d'après 10)c)i).}$$

Calculons les deux termes de la somme en revenant à la définition de $E_B(Y)$.

$$\begin{aligned}
E_B\left(\mathbb{1}_B u\right) &= \frac{1}{P(B)}E\left(\mathbb{1}_B u \mathbb{1}_B\right)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}E\left(\mathbb{1}_B u \mathbb{1}_{\overline{B}}\right)\mathbb{1}_{\overline{B}} \\
&= \frac{u}{P(B)}E\left(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_B\right)\mathbb{1}_B + \frac{u}{P(\overline{B})}E\left(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_{\overline{B}}\right)\mathbb{1}_{\overline{B}} \text{ par linéarité} \\
&= \frac{u}{P(B)}E\left(\mathbb{1}_{B\cap B}\right)\mathbb{1}_B + \frac{u}{P(\overline{B})}E\left(\mathbb{1}_{B\cap\overline{B}}\right)\mathbb{1}_{\overline{B}} \text{ par la question 10)b)} \\
&= \frac{u}{P(B)}E\left(\mathbb{1}_B\right)\mathbb{1}_B + \frac{u}{P(\overline{B})}E\left(\mathbb{1}_\emptyset\right)\mathbb{1}_{\overline{B}} \\
&= u\mathbb{1}_B \text{ car } E\left(\mathbb{1}_B\right) = P(B) \text{ et } \mathbb{1}_\emptyset = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_B\left(\mathbb{1}_C v\right) &= \frac{1}{P(B)}E\left(\mathbb{1}_C v \mathbb{1}_B\right)\mathbb{1}_B + \frac{1}{P(\overline{B})}E\left(\mathbb{1}_C v \mathbb{1}_{\overline{B}}\right)\mathbb{1}_{\overline{B}} \\
&= \frac{v}{P(B)}E\left(\mathbb{1}_C \mathbb{1}_B\right)\mathbb{1}_B + \frac{v}{P(\overline{B})}E\left(\mathbb{1}_C \mathbb{1}_{\overline{B}}\right)\mathbb{1}_{\overline{B}} \text{ par linéarité} \\
&= \frac{v}{P(B)}E\left(\mathbb{1}_{C\cap B}\right)\mathbb{1}_B + \frac{v}{P(\overline{B})}E\left(\mathbb{1}_{C\cap\overline{B}}\right)\mathbb{1}_{\overline{B}} \text{ par la question 10)b)} \\
&= \frac{v}{P(B)}E\left(\mathbb{1}_C\right)\mathbb{1}_B + \frac{v}{P(\overline{B})}E\left(\mathbb{1}_\emptyset\right)\mathbb{1}_{\overline{B}} \\
&= \frac{P(C)}{P(B)}v\mathbb{1}_B.
\end{aligned}$$

En reportant dans $(*)$, on obtient :

$E_B\left(\mathbb{1}_B u\right)+E_B\left(\mathbb{1}_C v\right)=u\mathbb{1}_B+\dfrac{P(C)}{P(B)}v\mathbb{1}_B$, c'est-à-dire :

$$E_{(\tau\geq T-1)}\left(\mathbb{1}_{(\tau\geq T-1)}u(X(T-2),X(T-1))+\mathbb{1}_{(\tau=T)}u(X(T-1),X(T))\right)$$
$$=u(X(T-2),X(T-1))\mathbb{1}_{(\tau\geq T-1)}+\frac{P(\tau=T)}{P(\tau\geq T-1)}u(X(T-1),X(T))\mathbb{1}_{(\tau\geq T-1)}.$$

12)d)i) Posons $B=(\tau\geq T-1)$, $Y=\displaystyle\sum_{t=T-2}^{\tau-1}u(X(t),X(t+1))$,

$u=u(X(T-2),X(T-1))$ et $v=u(X(T-1),X(T))$.

Les questions 12)b) et 12)c) donnent :

$$\mathbb{1}_B E_B(Y)=\left(u+\frac{P(\tau=T)}{P(B)}v\right)\mathbb{1}_B \quad (*)$$

Calculons l'espérance des deux termes.

Le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned}E(\mathbb{1}_B E_B(Y)) &= \sum_{(x,y)\in\mathbb{1}_B(\Omega)\times E_B(Y)(\Omega)} xyP(\mathbb{1}_B=x\cap E_B(Y)=y)\\ &= \sum_{y\in E_B(Y)(\Omega)} yP(\mathbb{1}_B=1\cap E_B(Y)=y)\\ &= \sum_{y\in E_B(Y)(\Omega)} yP(B\cap E_B(Y)=y).\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$E\left(\left(u+\frac{P(\tau=T)}{P(B)}v\right)\mathbb{1}_B\right)=\left(u+\frac{P(\tau=T)}{P(B)}v\right)E(\mathbb{1}_B)=\left(u+\frac{P(\tau=T)}{P(B)}v\right)P(B).$$

En reportant dans $(*)$, on a :

$$\sum_{y\in E_B(Y)(\Omega)} yP(B\cap E_B(Y)=y)=\left(u+\frac{P(\tau=T)}{P(B)}v\right)P(B).$$

**Supposons B réalisé**.

$B$ est alors certain donc $P(B)=1$. L'égalité précédente devient :

$$\sum_{y\in E_B(Y)(\Omega)} yP(E_B(Y)=y)=(u+P(\tau=T)v) \quad (**)$$

Or, $\displaystyle\sum_{y\in E_B(Y)(\Omega)} yP(E_B(Y)=y)=E\left(E_B(Y)\right)=E(Y)$ d'après 10)c)ii)

En reportant dans $(**)$, on a :

$E(Y)=u(X(T-2),X(T-1))+P(\tau=T)u(X(T-1),X(T))$.

$X(T-2)$ et $X(T-1)$ étant supposés connus, pour maximiser $E(Y)$, il faut choisir $X(T)$ de sorte que $u(X(T-1),X(T))$ soit maximal, ce qui donne $X(T)=1$ comme le montre la question 11)a).

12)d)ii)$u(X(T-1),1) = \ln\alpha - \ln X(T-1) + \ln 1 - \ln(1+(\alpha-1)\times 1)$
$= \ln\alpha - \ln X(T-1) + 0 - \ln\alpha = -\ln X(T-1)$.

12)e)$$\begin{aligned}P_{(\tau\geq T-1)}(\tau = T) &= 1 - P_{(\tau\geq T-1)}(\tau \neq T)\\ &= 1 - P_{(\tau\geq T-1)}((\tau < T-1)\cup(\tau = T-1))\\ &= 1 - P_{(\tau\geq T-1)}(\tau < T-1) - P_{(\tau\geq T-1)}(\tau = T-1)\\ &= 1 - 0 - P_{(\tau\geq T-1)}(\tau = T-1)\\ &= 1 - H(T-1).\end{aligned}$$

12)f)Supposons $(\tau \geq T-1)$ réalisé. Posons $Y = \displaystyle\sum_{t=T-2}^{\tau-1} u(X(t), X(t+1))$.

La question 12)d)i) donne :

$E(Y) = u(X(T-2), X(T-1)) + P(\tau = T)u(X(T-1), X(T))$.

On a vu que pour toute valeur de $X(T-1)$, la valeur de $X(t)$ qui rend maximale $E(Y)$ est 1. Donc on peut déjà prendre $X(t) = 1$.
Par ailleurs, $P(\tau = T) = P_{(\tau\geq T-1)}(\tau = T) = 1 - H(T-1)$.

Maximiser $E(Y)$ revient donc à choisir $X(t-1)$ de sorte à maximiser $u(X(T-2), X(T-1)) + (1 - H(T-1))u(X(T-1), 1)$.

Enfin, $u(X(T-1), 1) = -\ln X(T-1)$ d'après la question 12)d)ii).

Donc $E(Y)$ est maximale pour la valeur $y^*(X(T-2), T-2)$ choisie pour $X(T-1)$ qui rend maximale $\phi : y \mapsto u(X(T-2), y) - (1 - H(T-1))\ln y$.

12)g)Etudions les variations sur $]0,1]$ de $\phi$.

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \ln\alpha - \ln X(T-2) + \ln y - \ln(1+(\alpha-1)y) - (1-H(T-1))\ln y\\ &= \ln\alpha - \ln X(T-2) + H(T-1)\ln y - \ln(1+(\alpha-1)y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall y \in\, ]0,1]\,, \phi'(y) &= \frac{H(T-1)}{y} - \frac{\alpha-1}{1+(\alpha-1)y}\\ &= \frac{H(T-1)\,(1+(\alpha-1)y) - (\alpha-1)y}{y\,(1+(\alpha-1)y)}\\ &= \frac{H(T-1) + (\alpha-1)(H(T-1)-1)y}{y\,(1+(\alpha-1)y)}.\end{aligned}$$

12)h)Comme $\alpha > 1$, $\phi'(y)$ est du signe du numérateur.

$$\begin{aligned}\phi'(y) \geq 0 &\iff H(T-1) + (\alpha-1)(H(T-1)-1)y \geq 0\\ &\iff (\alpha-1)(H(T-1)-1)y \geq -H(T-1)\\ &\iff (\alpha-1)(1-H(T-1))y \leq H(T-1)\\ &\iff y \leq \frac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \text{ car } \alpha > 1 \text{ et } H(T-1) < 1.\end{aligned}$$

Si $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leq 1$, on obtient le tableau suivant :

| $y$ | $0$ | | $\frac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\phi'(y)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\phi(y)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\phi\left(\frac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}\right)$ | $\searrow$ | $-\ln X(T-2)$ |

12)i)Si $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geq 1$, on obtient le tableau suivant :

| $y$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\phi'(y)$ | | $+$ | |
| $\phi(y)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-\ln X(T-2)$ |

12)j)$y^*(X(T-2), T-2)$ est la valeur de $y$ qui rend maximale $\phi(y)$.
Compte tenu des questions 12)h) et 12)i), on distingue deux cas :

• si $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \leq 1$, alors $y^*(X(T-2), T-2) = \dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}$.

✓ Comme $y^*(X(T-2), T-2) \in [A(X(T-2), 1]$, on a en fait :

$$y^*(X(T-2), T-2) = max\left(\frac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))}, A(X(T-2)\right).$$

• si $\dfrac{H(T-1)}{(\alpha-1)(1-H(T-1))} \geq 1$, alors $y^*(X(T-2), T-2) = 1$.