DM6 cubes
à rendre le lundi / /

Dans tout le problème, t désigne un réel strictement positif.
On définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par $x_0 = t$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n}$.

On définit également les suites $(U_n)_{n\geq 0}$ et $(V_n)_{n\geq 0}$ par : $\begin{cases} U_n = 2^n(x_n - 1) \\ V_n = 2^n\left(1 - \dfrac{1}{x_n}\right) = \dfrac{U_n}{x_n} \end{cases}$

<u>Partie A</u>

Dans cette partie, on cherche un développement asymptotique de x_n.

1)Etudier le signe sur $[0, +\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x} - x$.

2)On suppose $t \geq 1$.
Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

3)On suppose $t \leq 1$. Etudier de même la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

4)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} - U_n = -2^n(x_{n+1} - 1)^2$.
En déduire le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$.

5)Déterminer de même le sens de variation de la suite $(V_n)_{n\geq 0}$.

6)Montrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n - V_n \geq 0$.

7)En utilisant les questions précédentes, conclure que les suites $(U_n)_{n\geq 0}$ et $(V_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes et ont même limite L (ne pas chercher à la déterminer).

8)Conclure que $x_n \underset{+\infty}{=} 1 + \dfrac{L}{2^n} + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ *(développement asymptotique)*

<u>Partie B</u>

La limite L précédente, les suites $(x_n)_{n\geq 0}$, $(U_n)_{n\geq 0}$ et $(V_n)_{n\geq 0}$ dépendent de la valeur de $x_0 = t$. Nous les noterons donc respectivement $L(t)$, $(x_n(t))_{n\geq 0}$, $(U_n(t))_{n\geq 0}$ et $(V_n(t))_{n\geq 0}$.
Le but de cette partie est d'étudier les propriétés de la fonction $t \mapsto L(t)$.

9)Préciser $L(1)$.

10)Justifier brièvement que $\forall t > 0, \forall n \in \mathbf{N},\ V_n(t) \leq L(t) \leq U_n(t)$.
En déduire que $\forall t > 0,\ 1 - \dfrac{1}{t} \leq L(t) \leq t - 1$.

11)Calculer $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{L(t)}{t-1}$. En déduire que L est dérivable en 1 et préciser $L'(1)$.

12)Montrer par récurrence que $\forall t > 0, \forall s > 0, \forall n \in \mathbf{N},\ x_n(st) = x_n(s)x_n(t)$.

13)En déduire que $\forall t > 0, \forall s > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(U_n(st) - U_n(s) - U_n(t)\right) = 0$.

14)Déterminer pour $t > 0$ et $s > 0$ une relation entre $L(st)$, $L(s)$ et $L(t)$.

15)Soit $s > 0$. A l'aide des questions 11 et 14, déterminer $\lim\limits_{x\to s} \dfrac{L(x) - L(s)}{x - s}$.

16)Conclure que L est dérivable sur $]0, +\infty[$ et préciser sa fonction dérivée.

17)Déterminer enfin $L(t)$ en fonction de t.