correction concours blanc cubes - ecg2 - maths appliquées

Exercice 1 (ecricome 2003 légèrement modifié)

Partie A

1)Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on transforme $A-\lambda I$ en une matrice triangulaire.

$$A-\lambda I = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda^2-3\lambda+2 & 3-2\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow (3-\lambda)L_1 - L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } A &\iff A-\lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \lambda^2-3\lambda+2=0 \text{ ou } 2-\lambda=0 \\ &\iff \lambda=1 \text{ ou } \lambda=2. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et 2.

2)0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible.

3)• $E_1(A)=\{U\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A-I)U=0\}$.

Posons $U=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} (A-I)U=0 &\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2x-2y+3z=0 \\ x-y+2z=0 \\ z=0 \end{cases} \\ &\iff z=0 \text{ et } x=y. \end{aligned}$$

Donc $E_1(A)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z=0 \text{ et } x=y\right\} = \left\{\begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix},\ y\in\mathbf{R}\right\}$.

Ainsi, $E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$, elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(A)$.

• $E_2(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A-2I)U = 0\}$.

Posons $U = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
(A-2I)U = 0 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\1 & -2 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=0 & L_1\\ x-2y+2z=0 & L_2\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=0 & L_1\\ z=0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow z=0 \text{ et } x=2y.
\end{aligned}$$

Donc $E_2(A) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid z=0 \text{ et } x=2y\right\} = \left\{\begin{pmatrix}2y\\y\\0\end{pmatrix},\ y\in\mathbf{R}\right\}$.

Ainsi, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

$\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_2(A)$, elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_2(A)$.

4)$dimE_1(A) + dimE_2(A) = 1+1 = 2$, mais $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
D'après le théorème de réduction, A n'est pas diagonalisable.

5)a)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$\begin{aligned}
au_1+bu_2+cu_3 = 0 &\Longleftrightarrow a(1,1,0)+b(2,1,0)+c(1,1,1) = (0,0,0)\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} a+2b+c=0 & L_1\\ a+b+c=0 & L_2\\ c=0 & L_3\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} a+2b+c=0 & L_1\\ b=0 & L_2 \leftarrow L_1-L_2\\ c=0 & L_3\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow a=b=c=0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{C}$ est libre.

$\mathscr{C}$ est une famille libre de cardinal 3 de $\mathbf{R}^3$ et $\dim \mathbf{R}^3 = 3$.
Donc $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

b)$u_1 = (1,1,0) = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3$,

$u_2 = (2,1,0) = 2e_1 + 1e_2 + 0e_3$,

$u_3 = (1,1,1) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3$.

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour trouver P^{-1}, on applique la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c)Notons U_1, U_2 et U_3 les matrices colonnes de u_1, u_2 et u_3 dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^3$.

D'après la question 3), on a : $AU_1 = U_1$ et $AU_2 = U_2$, ce qui prouve que $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = 2u_2$.

De plus, par produit matriciel, on a :

$$AU_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = U_2 + 2U_3.$$

Donc $f(u_3) = u_2 + 2u_3$.

On conclut que la matrice de f dans la base $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d)On sait que $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$, $T = \mathscr{M}_{\mathscr{C}}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$.
La formule de changement de base donne : $A = PTP^{-1}$.

e)Raisonnement par récurrence.
Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « il existe un réel u_n tel que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & u_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ ».

En prenant $u_0 = 0$, on a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^0 & u_0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = T^0$.

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & u_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ par HR} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n + 2u_n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Posons $u_{n+1} = 2^n + 2u_n$.

On a alors : $T^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & u_{n+1} \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

La proposition $\mathscr{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

f)La question précédente donne : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 2^n + 2u_n$.

g)Raisonnement par récurrence.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n = n2^{n-1}$. »

$\mathscr{P}(0)$ est vraie immédiatement du fait que $u_0 = 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2^n + 2u_n \\ &= 2^n + 2\left(n2^{n-1}\right) \text{ par HR} \\ &= 2^n + n2^n \\ &= (n+1)2^n. \end{aligned}$$

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = n2^{n-1}$.

Partie B

6)• $\mathscr{C}(A)$ est une partie de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

• $\forall M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}),\ A0 = 0A = 0$ donc $0 \in \mathscr{C}(A)$, ce qui montre que $\mathscr{C}(A)$ n'est pas vide.

• Soient M et N deux éléments de $\mathscr{C}(A)$, soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} A(\lambda M + N) &= \lambda AM + AN \\ &= \lambda MA + NA \quad \text{car } M \in \mathscr{C}(A) \text{ et } N \in \mathscr{C}(A) \\ &= (\lambda M + N)A. \end{aligned}$$

Donc $\lambda M + N \in \mathscr{C}(A)$, ce qui prouve la stabilité de $\mathscr{C}(A)$ par CL.

On conclut que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

7)Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, on a :

$$\begin{aligned} AM = MA &\iff PTP^{-1}M = MPTP^{-1} \text{ grâce à 5)d)} \\ &\iff P^{-1}PTP^{-1}MP = P^{-1}MPTP^{-1}P \\ &\iff ITP^{-1}MP = P^{-1}MPTI \\ &\iff TP^{-1}MP = P^{-1}MPT. \end{aligned}.$$

8)Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Posons $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} TN = NT &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b & b+2c \\ d & 2e & e+2f \\ g & 2h & h+2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} b = 2b \\ c = b + 2c \\ 2d + g = d \\ 2e + h = 2e \\ 2f + i = e + 2f \\ 2g = g \\ 2i = h + 2i \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = -g \\ h = 0 \\ i = e \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}.$$

$\iff b = c = d = g = h = 0$ et $i = e$

$$\iff N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

En renommant les lettres ($e \to b$ et $f \to c$), on obtient le résultat demandé.

9)Grâce aux questions 7) et 8), on déduit pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C}(A) &\iff AM = MA \\ &\iff TP^{-1}MP = P^{-1}MPT \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\ \mid P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\ \mid M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\ \mid M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\ \mid M = \begin{pmatrix} a & 2b & 2c+b \\ a & b & c+b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\ \mid M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{C}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$.

10)• On voit facilement que pour tout couple (a,b,c) de réels, on a :
$\begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$
$= a\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a donc $\mathscr{C}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Cela prouve que $\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathscr{C}(A)$.

• De plus, pour tous réels a, b et c, on a :
$a\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\iff \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\iff \begin{cases} -a+2b=0 \\ 2a-2b=0 \\ -a+b+2c=0 \\ -a+b=0 \\ 2a-b=0 \\ -a+b+c=0 \\ b=0 \end{cases}$
$\iff a=b=c=0$.
Donc $\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre.

• C'est une famille libre et génératrice de $\mathscr{C}(A)$, c'est donc une base de $\mathscr{C}(A)$. Ainsi, $dim\mathscr{C}(A) = 3$.

Exercice 2

Partie A

1)f est dérivable sur $[0,+\infty[$ car polynomiale.
$\forall x \geq 0,\ f'(x) = \dfrac{1+2x}{2} \geq 0.$
Donc f est croissante sur $[0,+\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2)Soit $\mathscr{P}(n)$, la proposition « $0 \leq U_n \leq 1$ ».
$\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque $0 < U_0 \leq \dfrac{1}{2}$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ quelconque. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
De $0 \leq U_n \leq 1$, on tire : $f(0) \leq f(U_n) \leq f(1)$ par croissance de f,
soit $0 \leq U_{n+1} \leq 1$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq U_n \leq 1$.

3)a)Pour tout $\forall x \in [0,1]$, on a :

$$f(x) - x = \frac{x+x^2}{2} - x = \frac{x^2-x}{2} = \frac{x(x-1)}{2} \leq 0.$$

Donc $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq x$.

b)Comme $U_n \in [0,1]$, il est valide de remplacer x par U_n dans l'inégalité ci-dessus, ce qui donne :

$\forall n \in \mathbf{N},\ f(U_n) \leq U_n$, soit $U_{n+1} \leq U_n$.
Ainsi, $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

4)$(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) donc convergente.
Soit l sa limite.
$\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq U_n \leq U_0$ par décroissance, soit $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{2}$.

Par passage à la limite, on a donc $0 \leq l \leq \dfrac{1}{2}$.

f est continue sur $[0,+\infty[$ donc continue en l.
D'après le théorème du point fixe, l est solution de l'équation $f(x) = x$.
Or, $f(x) = x \Longleftrightarrow x^2 - x = 0 \Longleftrightarrow x(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$ *ou* $x = 0$.
Donc $l = 0$ ou $l = 1$.
La solution $l = 1$ est à exclure puisque $0 \leq l \leq \dfrac{1}{2}$.
Donc $l = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Partie B

5)Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(V_n) - V_{n+1} &= \frac{V_n + V_n^2}{2} - V_{n+1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^n\left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left[-1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \leq 0.
\end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ f(V_n) \leq V_{n+1}$.

6)Soit $\mathscr{P}(n)$, la proposition : « $0 \leq U_n \leq V_n$ ».
On a $V_0 = \dfrac{1}{2}$ et $U_0 \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ donc $0 \leq U_0 \leq V_0$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$ quelconque. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.
De $0 \leq U_n \leq V_n$, on tire $f(0) \leq f(U_n) \leq f(V_n)$ par croissance de f, soit : $0 \leq U_{n+1} \leq f(V_n)$.
Or, $f(V_n) \leq V_{n+1}$ donc par recollement : $0 \leq U_{n+1} \leq V_{n+1}$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq U_n \leq V_n$.

7) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$.
D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Et on retrouve le résultat de la question 4)

Partie C

8)Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $1 + x \geq 1$ donc $\ln(1+x) \geq 0$.

Pour l'autre inégalité, on étudie sur $[0, +\infty[$ la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$.

g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geq 0,\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x} \leq 0$.

Donc g est décroissante sur $[0, +\infty[$.

Comme $g(0) = 0$, on a alors $\forall x \geq 0,\ g(x) \leq 0$, soit $\ln(1+x) \leq x$.

Finalement, pour tout réel $x \geq 0,\ 0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

9)Comme pour tout $k \in \mathbf{N}$, $U_k \geq 0$, il est valide de remplacer dans l'inégalité ci-dessus x par U_k.
On obtient pour tout $k \in \mathbf{N} : 0 \leq \ln(1+U_k) \leq U_k$.

En sommant ces inégalités pour $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ avec $n \in \mathbf{N}^*$:
$0 \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+U_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} U_k$, ou encore :

$$0 \leq S_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} U_k.$$

Des inégalités $\forall k \in \mathbf{N},\ U_k \leq V_k$, on obtient par sommation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} U_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} V_k.$$

Par recollement, on déduit que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq S_n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} V_k$.

10)a)La suite $(V_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $3/4$.

La formule sur les termes consécutifs d'une suite géométrique donne alors :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} V_k = V_0 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}} = 2\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \leq 2.$
b)En utilisant la question 9), on conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leq S_n \leq 2$.

11)Pour tout $n \in \mathbf{N} : S_{n+1} - S_n = \ln(1+U_n) \geq 0$ puisque $U_n \geq 0$.
Donc $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

Par ailleurs, elle est majorée par 2. Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente.

Enfin, de $0 \leq S_n \leq 2$, on tire par passage à la limite : $0 \leq l \leq 2$.

Partie D

12)On a pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}\ln(U_{k+1}) - \ln(U_k) &= \ln\left(\frac{U_{k+1}}{U_k}\right)\\ &= \ln\left(\frac{\frac{U_k+U_k^2}{2}}{U_k}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1+U_k}{2}\right)\\ &= \ln(1+U_k) - \ln 2.\end{aligned}$$

13)En sommant les inégalités précédentes pour $k \in \{0, ..., n-1\}$, on a :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} [\ln(U_{k+1}) - \ln(U_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} [\ln(1+U_k) - \ln 2]$.
En télescopant la somme de gauche et par linéarité de Σ, on déduit :
$\displaystyle\ln(U_n) - \ln(U_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+U_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln 2$, c'est-à-dire :
$\ln(U_n) - \ln(U_0) = S_n - n\ln 2$.
On a donc $\forall n \geq 1,\ \ln(U_n) = \ln(U_0) + S_n - n\ln 2$.

14)• En appliquant l'exponentielle, on déduit :
$e^{\ln U_n} = e^{\ln(U_0)+S_n-n\ln 2}$, c'est-à-dire :
$U_n = e^{\ln(U_0)} e^{S_n} e^{-n\ln 2} = \dfrac{U_0 e^{S_n}}{2^n}$.
Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = l$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{S_n} = e^l$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_0 e^{S_n} = U_0 e^l$.
Posons $\alpha = U_0 e^l$, on a $\alpha > 0$ car $U_0 > 0$ et $e^l > 0$.
On a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_0 e^{S_n} = \alpha$ ou encore $U_0 e^{S_n} \underset{+\infty}{\sim} \alpha$, d'où $U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{2^n}$.
• De $0 \leq l \leq 2$, on tire : $1 \leq e^l \leq \mathrm{e}^2$.
De plus, $0 < U_0 \leq \dfrac{1}{2}$. Par produit d'inégalités : $0 < U_0 e^l \leq \dfrac{e^2}{2}$.
Ainsi, $0 < \alpha \leq \dfrac{e^2}{2}$.

Partie E

15)L'équation caractéristique associée à (E_0) est : $r^2 + 3r + 2 = 0$.
Ses racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -2$.
Les solutions de (E_0) sont les fonctions $t \mapsto \beta_1 e^{-t} + \beta_2 e^{-2t}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$.

16)Soit $y_p : t \mapsto at^2 + bt + c$.
On a $\forall t \in \mathbf{R},\ y_p'(t) = 2at + b$ et $y_p''(t) = 2a$.
y_p est solution de (E)
$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ y_p''(t) + 3y_p'(t) + 2y_p(t) = f(t)$
$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ 2a + 3(2at+b) + 2(at^2+bt+c) = \dfrac{t+t^2}{2}$
$\iff \forall t \in \mathbf{R},\ 2at^2 + (6a+2b)t + (2a+3b+2c) = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{2}t$
$$\iff \left\{ \begin{array}{r} 2a = \dfrac{1}{2} \\ 6a + 2b = \dfrac{1}{2} \\ 2a + 3b + 2c = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} a = 1/4 \\ b = -1/2 \\ c = 1/2 \end{cases}$$

Donc $y_p : t \mapsto \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E).

17)D'après le cours, les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière de (E) à toutes les solutions de (E_0).

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $t \mapsto \beta_1 e^{-t} + \beta_2 e^{-2t} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{R}^2$.

18) $\lim\limits_{t \to +\infty} \beta_1 e^{-t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \beta_2 e^{-2t} = 0$,

$\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \right) = +\infty$.

Par somme, $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\beta_1 e^{-t} + \beta_2 e^{-2t} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \right) = +\infty$.

Ainsi, toutes les trajectoires de (E) divergent.

Exercice 3 (edhec 2009 - maths appro)

1)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout réel $t > 0$, on a :

$$\frac{(1+t^a)^n}{t^{an}} = \left(\frac{1+t^a}{t^a}\right)^n = \left(\frac{1}{t^a}+1\right)^n.$$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{t^a}+1\right) = 1$ car $a > 0$. Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{t^a}+1\right)^n = 1$.

Ainsi, $(1+t^a)^n \underset{t \to +\infty}{\sim} t^{an}$.

b)Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{an}} dt$ est une intégrale de Riemann de paramètre an.

Elle converge car $an > 1$ du fait que $a > 1$ et $n \geq 1$.

La question 1)a) donne par inverse : $\dfrac{1}{(1+t^a)^n} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{an}}$.

D'après le critère d'équivalence sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^a)^n} dt$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^a)^n} dt$ converge car $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^a)^n}$ est continue sur $[0,1]$.

Par relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^a)^n} dt$ converge.

Enfin, $\forall t > 0,\ \dfrac{1}{(1+t^a)^n} > 0$.

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et $+\infty$, on déduit :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^a)^n} dt > 0$, c'est-à-dire $u_n > 0$.

c)Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^a)^{n+1}} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^a)^n} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+t^a)^{n+1}} - \frac{1}{(1+t^a)^n}\right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{-t^a}{(1+t^a)^{n+1}} dt. \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0,\ \dfrac{-t^a}{(1+t^a)^{n+1}} \leq 0$.

En intégrant entre les bornes croissantes 0 et $+\infty$, on déduit :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-t^a}{(1+t^a)^{n+1}} dt \leq 0$.

On a donc $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \leq 0$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

$(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée (par zéro) donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone.

2)a)Soit $x > 0$. Effectuons une IPP sur $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^a)^n} dt$ en posant :

$u'(t) = 1 \quad v(t) = \dfrac{1}{(1+t^a)^n}$

$u(t) = t \quad v(t) = \dfrac{-nat^{a-1}}{(1+t^a)^{n+1}}$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, x]$. L'IPP est valide et donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{(1+t^a)^n} dt &= \left[\frac{t}{(1+t^a)^n}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-nat^{a-1}t}{(1+t^a)^{n+1}} dt \\
&= \frac{x}{(1+x^a)^n} + na \int_0^x \frac{t^a}{(1+t^a)^{n+1}} dt \\
&= \frac{x}{(1+x^a)^n} + na \int_0^x \frac{(1+t^a)-1}{(1+t^a)^{n+1}} dt \\
&= \frac{x}{(1+x^a)^n} + na \int_0^x \left(\frac{1}{(1+t^a)^n} - \frac{1}{(1+t^a)^{n+1}}\right) dt.
\end{aligned}$$

On a donc l'égalité $(*)$ ci-dessous :

$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^a)^n} dt = \frac{x}{(1+x^a)^n} + na \left(\int_0^x \frac{1}{(1+t^a)^n} dt - \int_0^x \frac{1}{(1+t^a)^{n+1}} dt\right)$$

D'après la question 1)a), on a : $(1+x^a)^n \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{an}$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(1+x^a)^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^{an}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{an-1}} = 0$ car $an - 1 > 0$.

Un passage à la limite dans $(*)$ quand $x \to +\infty$ donne alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^a)^n} dt = 0 + na \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^a)^n} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^a)^{n+1}} dt\right),$$

c'est-à-dire :

$$u_n = na\,(u_n - u_{n+1}).$$

b)Soit $n \geq 2$ un entier.

La question précédente donne pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$u_k = ka\,(u_k - u_{k+1})$, soit $u_k = kau_k - kau_{k+1}$, ou encore $u_{k+1} = \dfrac{ka-1}{ka} u_k$.

On a donc $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ u_{k+1} = \left(1 - \dfrac{1}{ka}\right) u_k$.

En multipliant membre à membre ces égalités pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :
$\prod_{k=1}^{n-1} u_{k+1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\left(1 - \frac{1}{ka}\right) u_k\right)$
ou encore : $\prod_{k=1}^{n-1} u_{k+1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{ka}\right) \prod_{k=1}^{n-1} u_k$
c'est-à-dire : $u_2 \times \cdots u_{n-1} \times u_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{ka}\right) \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1}$.
En simplifiant les facteurs, on conclut que

$$\forall n \geq 2,\ u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{ka}\right).$$

Remarque
On pouvait également faire une récurrence.

3)• Pour tout entier $n \geq 2$, on déduit :
$\ln u_n = \ln \left(u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{ka}\right)\right) = \ln u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{1}{ka}\right)$.
Posons $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{1}{ka}\right)$.
$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\lim_{k \to +\infty} -\frac{1}{ka} = 0$ donc $\ln \left(1 - \frac{1}{ka}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{-1}{ka}$.
Les séries $\sum_{k \geq 1} \ln \left(1 - \frac{1}{ka}\right)$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{-1}{ka}$ sont donc de même nature, cette dernière étant de même nature que la série harmonique divergente $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$.
Donc la série $\sum_{k \geq 1} \ln \left(1 - \frac{1}{ka}\right)$ diverge. Ainsi, la suite $(T_n)_{n \geq 2}$ diverge.
Par ailleurs, $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \ln \left(1 - \frac{1}{ka}\right) \leq 0$ donc $(T_n)_{n \geq 2}$ décroît.
Cela entraîne que $\lim_{n \to +\infty} T_n = -\infty$ et par suite que $\lim_{n \to +\infty} \ln u_n = -\infty$.
• Enfin, en écrivant $u_n = e^{\ln u_n}$, compte tenu que $\lim_{n \to +\infty} \ln u_n = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, on conclut :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

4)a)On part de l'égalité $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ u_k = kau_k - kau_{k+1}$ qu'on réécrit :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ u_k = kau_k - (k+1)au_{k+1} + au_{k+1}.$$

En sommant ces égalités pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (kau_k - (k+1)au_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n} au_{k+1} \quad (*)$$

La deuxième somme est télescopique et vaut : $au_1 - (n+1)au_{n+1}$,

la troisième somme vaut : $a\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} = a\sum_{j=2}^{n+1} u_j = a\,(S_n - u_1 + u_{n+1})$.

En remplaçant dans $(*)$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= au_1 - (n+1)au_{n+1} + a\,(S_n - u_1 + u_{n+1}) \\ &= au_1 - nau_{n+1} - au_{n+1} + aS_n - au_1 + au_{n+1} \\ &= -nau_{n+1} + aS_n. \end{aligned}$$

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ S_n = \dfrac{na}{a-1}u_{n+1}$..

b)De la question précédente, on déduit pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \ln S_n &= \ln\left(\frac{na}{a-1}u_{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{na}{a-1}\right) + \ln\left(u_{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{na}{a-1}\right) + \ln\left(u_1 \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{ka}\right)\right) \quad \text{d'après 2)b)} \\ &= \ln\left(\frac{na}{a-1}\right) + \ln u_1 + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{ka}\right) \\ &= \ln u_1 + \ln\left(\frac{na}{a-1}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{a}\right) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{ka}\right) \\ &= \ln u_1 + \ln(n) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{ka}\right) \\ &= \ln u_1 - \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k-1) - \ln(k)\big) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{ka}\right) \\ &= \ln u_1 - \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{ka}\right) \end{aligned}$$

Donc $\forall n \geq 2,\ \ln S_n = \ln u_1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{ka}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$.

c)$\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$.

d)Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{-1}{ka} = 0$, on peut remplacer dans la question précédente x par $\dfrac{-1}{ka}$, ce qui donne :

$\ln\left(1 - \dfrac{1}{ka}\right) \underset{k\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{ka} + o\left(\dfrac{1}{ka}\right) = -\dfrac{1}{ka} + o\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

De même, $\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{k} + o\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

Par différence, on déduit :

$\ln\left(1 - \dfrac{1}{ka}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{ka} + \dfrac{1}{k} + o\left(\dfrac{1}{k}\right)$,

c'est-à-dire : $\ln\left(1 - \dfrac{1}{ka}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \dfrac{a-1}{ak} + o\left(\dfrac{1}{k}\right)$

Donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{ka}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{a-1}{ak}$.

e)Pour tout entier $n \geq 2$, posons : $R_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(1 - \dfrac{1}{ka}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)\right)$.

D'après la question 4)b), on a alors : $\forall n \geq 2,\ \ln S_n = \ln u_1 + R_n \qquad (**)$

$\forall k \geq 2,\ \ln\left(1 - \dfrac{1}{ka}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) \geq 0$ (vient du fait que $a > 1$).

$\displaystyle\sum_{k\geq 2} \left(\ln\left(1 - \dfrac{1}{ka}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)\right)$ est alors une série à termes positifs.

Par ailleurs, $\ln\left(1 - \dfrac{1}{ka}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{a-1}{ak}$.

$\displaystyle\sum_{k\geq 2} \dfrac{a-1}{ak}$ est divergente car de même nature que la série harmonique.

D'après le critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \left(\ln\left(1 - \dfrac{1}{ka}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)\right)$ diverge.

Comme c'est une série à termes positifs divergente, sa somme partielle R_n tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.

En passant à la limite dans $(**)$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, ce qui prouve que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.