DM9 cubes
à rendre le lundi / /

Exercice :

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois.

On effectue une succession de tirages simultanés de deux boules dans cette urne.

A chaque tirage :

– si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les deux boules dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée,

– si les deux boules tirées portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note T_i la variable aléatoire qui vaut k si exactement k tirages ont été nécessaires pour constituer i paires.

Pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, on pourra introduire l'événement E_j = « on n'obtient pas de paire au i-ème tirage ».

1)a)En utilisant certains événements E_j, montrer que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(T_1 = k) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{k-1} \frac{1}{2n-1}.$$

Reconnaître la loi de T_1.

b)Donner sans calcul la valeur de l'espérance de T_1.

2)On pose $X_1 = T_1$ et pour tout $i \in [\![2, n]\!],\ X_i = T_i - T_{i-1}$.

a)Que représente la variable aléatoire X_i ?

b)Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de X_i et son epérance.

c)Justifier que $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

En déduire que T_n admet une espérance et que $E(T_n) = n^2$.

3)On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces n tirages.

a)Calculer $P(S_n = 0)$.

b)Déterminer $\lim_{n \to +\infty} P(S_n = 0)$.

c)Montrer que $P(S_n = n) = \dfrac{n!2^n}{(2n)!}$.