DM1
à rendre le lundi / /

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln x} & \text{si} \quad x \in]0,1[\,, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

1)Justifier que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$:

$$f'(x) = \frac{-x\ln x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)(\ln x)^2}.$$

2)a)Justifier que $\forall t \in]0,1[\,, t\ln t < 0$.

2)b)En déduire que f est strictement croissante sur $]0,1[$.

3)a)Montrer que f est continue (à droite) en 0.

3)b)Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

3)c)En déduire que f est dérivable (à droite) en 0 et préciser $f'(0)$.

4)Déterminer la limite de f en 1^-. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_f$?

5)Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ ainsi que tous les éléments qui vous paraissent utiles.

Exercice 2
On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$:

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $F = \left\{aI + bJ + cK, (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\right\}$.

1)a)Montrer que F est un espace vectoriel.

1)b)Montrer que (I,J,K) est une famille libre.

1)c)Déterminer la dimension de F.

2)Soit $G = \{X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R}) | KX = X\}$.

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ et déterminer une base[1] (U_1, U_2) de G.

3)On pose $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{R})$.

1. Trouver d'abord une famille génératrice de G