Exercice 1 (ecricome 2022)

Partie I

1)Toute matrice de F s'écrit sous la forme $a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels quelconques.

Donc $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F.

Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires.
C'est donc une base de F et $dimF = 2$.

2)$I_3 \in G$ car $I_3^2 = I_3$, mais $2I_3 \notin G$ car $(2I_3)^2 = 4I_3 \neq I_3$.

Donc G n'est pas stable pour la multiplication externe, ce qui prouve que G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

3)a)$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \in F$ (prendre $a = 2/3$ et $b = -1/3$).

De plus, on a :

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/9 & -3/9 & -3/9 \\ -3/9 & 6/9 & -3/9 \\ -3/9 & -3/9 & 6/9 \end{pmatrix}.$$

Donc $A^2 = A$, ce qui prouve que $A \in G$.

Ainsi, $A \in F \cap G$.

b)Posons $P(X) = X^2 - X$.
On a : $P(A) = A^2 - A = 0$. Donc P est un polynôme annulateur de A.

c)Les racines de P sont 0 et 1. Donc $sp(A) \subset \{0, 1\}$.

• $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (A - I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}(A - I)U = 0 &\iff \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x + y + z = 0 \\ &\iff x = -y - z.\end{aligned}$$

En injectant au départ :

$$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -y-z \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$
$$= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$
$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$.

Elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $E_1(A)$ et $dim E_1(A) = 2$.

• $E_0(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid AU = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$AU = 0 \iff \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 & L_1 \\ \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 & L_2 \\ \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 & L_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 & L_1 \\ y - z = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ -y + z = 0 & L_3 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_0(A)$.

Elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_0(A)$ et $dim E_0(A) = 1$.

d)0 est valeur propre de A donc A n'est pas inversible.

$A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et $dim E_0(A) + dim E_1(A) = 3$. Donc A est diagonalisable, d'après le théorème de réduction.

Partie II

4)a)Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in G &\iff M^2 = M \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & b^2+2ab & b^2+2ab \\ b^2+2ab & a^2+2b^2 & b^2+2ab \\ b^2+2ab & b^2+2ab & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} a^2+2b^2 = a \\ b^2+2ab = b \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

b)On résout le système précédent.
La deuxième équation donne $b = 0$ ou $b + 2a - 1 = 0$.

• si $b = 0$
Le système est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{c} a^2 = a \\ b = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \text{ ou } a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right.$$

Les solutions sont les couples $(1, 0)$ et $(0, 0)$.

• si $b + 2a - 1 = 0$
Le système est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{c} a^2+2b^2 = a \\ b+2a-1 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} a^2+2(1-2a)^2 = a \\ b = 1-2a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} 9a^2-9a+2 = 0 \ (E) \\ b = 1-2a \end{array} \right.$$

Les racines de (E) sont $a_1 = \dfrac{9-\sqrt{9}}{2\times 9} = \dfrac{1}{3}$ et $a_1 = \dfrac{9+\sqrt{9}}{2\times 9} = \dfrac{2}{3}$.

Pour $a = \dfrac{1}{3}$, on trouve $b = \dfrac{1}{3}$.

Pour $a = \dfrac{2}{3}$, on trouve $b = -\dfrac{1}{3}$.

Les solutions sont les couples $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ et $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

$F \cap G$ est donc l'ensemble des 4 matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où (a, b) est l'un des 4 couples trouvés.

$$\begin{aligned} F \cap G &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}. \end{aligned}$$

5)$B = I_3 - A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \in F$ et $A \in F$.

La famille (A,B) est une famille de deux vecteurs de F, elle est libre car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Le cardinal de cette famille coïncide avec la dimension de F qui vaut 2.
Donc (A,B) est une base de F.

6)a)Posons $\alpha = a-b$ et $\beta = a+2b$.

$$\begin{aligned}
\alpha A+\beta B &= (a-b)A+(a+2b)B \\
&= (a-b)\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + (a+2b)\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(a-b)+\frac{1}{3}(a+2b) & -\frac{1}{3}(a-b)+\frac{1}{3}(a+2b) & -\frac{1}{3}(a-b)+\frac{1}{3}(a+2b) \\ -\frac{1}{3}(a-b)+\frac{1}{3}(a+2b) & \frac{2}{3}(a-b)+\frac{1}{3}(a+2b) & -\frac{1}{3}(a-b)+\frac{1}{3}(a+2b) \\ -\frac{1}{3}(a-b)+\frac{1}{3}(a+2b) & -\frac{1}{3}(a-b)+\frac{1}{3}(a+2b) & \frac{2}{3}(a-b)+\frac{1}{3}(a+2b) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\
&= M.
\end{aligned}$$

b)$AB = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$BA = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c)On fait une récurrence.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $I_3 = A+B$ », ce qui est vrai car $B = I_3 - A$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n M \\
&= (\alpha^n A+\beta^n B)(\alpha A+\beta B) \quad \text{par HR et grâce à 6)a)} \\
&= \alpha^{n+1}A^2 + \alpha^n\beta \underbrace{AB}_{=0} + \beta^n\alpha \underbrace{BA}_{=0} + \beta^{n+1}B^2 \\
&= \alpha^{n+1}A + \beta^{n+1}B.
\end{aligned}$$

En effet, A et B sont dans G (voir 4)b)). Donc $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

$\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

7)a)En raisonnant par contraposée, cela revient à montrer que

M n'est pas inversible $\iff \alpha = 0$ ou $\beta = 0$, c'est-à-dire :

M n'est pas inversible $\iff a-b=0$ ou $a+2b=0$ (C)

Distinguons deux cas.

• $b=0$

Alors, $M=aI$ et M n'est pas inversible $\iff a=0$. La condition (C) est vérifiée.

• $b\neq 0$

On transforme M par la méthode de Gauss.

$$M=\begin{pmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}\begin{matrix} L_1\\ L_2\\ L_3\end{matrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} b & a & b\\ a & b & b\\ b & b & a\end{pmatrix}\begin{matrix} L_1\longleftrightarrow L_2\\ L_2\longleftrightarrow L_1\\ L_3\end{matrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} b & a & b\\ 0 & b^2-a^2 & b^2-ab\\ 0 & b-a & a-b\end{pmatrix}\begin{matrix} L_1\\ L_2\longleftarrow bL_2-aL_1 \quad \text{(valide car } b\neq 0\text{)}\\ L_3\longleftarrow L_3-L_1\end{matrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} b & a & b\\ 0 & b-a & a-b\\ 0 & b^2-a^2 & b^2-ab\end{pmatrix}\begin{matrix} L_1\\ L_2\longleftrightarrow L_3\\ L_3\longleftrightarrow L_2\end{matrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} b & a & b\\ 0 & b-a & a-b\\ 0 & 0 & a^2+ab-2b^2\end{pmatrix}\begin{matrix} L_1\\ L_2\\ L_3\longleftrightarrow (b+a)L_2-L_3\end{matrix}$$

$$\begin{aligned} M \text{ n'est pas inversible } &\iff b-a=0 \;\text{ ou }\; a^2+ab-2b^2=0\\ &\iff b-a=0 \;\text{ ou }\; (a+2b)(a-b)=0\\ &\iff a-b=0 \;\text{ ou }\; a+2b=0.\end{aligned}$$

Et la condition (C) est vérifiée.

7)b)Comme α et β sont tous les deux non nuls, M est inversible.

Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} M^n\left(\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B\right) &= \left(\alpha^nA+\beta^nB\right)\left(\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B\right)\\ &= \underbrace{\alpha^n\alpha^{-n}}_{=1}A^2+\alpha^n\beta^{-n}\underbrace{AB}_{=0}+\beta^n\alpha^{-n}\underbrace{BA}_{=0}+\underbrace{\beta^n\beta^{-n}}_{=1}B^2\\ &= A^2+B^2\\ &= A+B\\ &= I_3.\end{aligned}$$

Donc M^n est inversible et $M^{-n}=\left(M^n\right)^{-1}=\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B$.

Remarque

On pouvait aussi faire une récurrence en vérifiant au préalable que
$M^{-1}=\alpha^{-1}A+\beta^{-1}B$.

Pour l'hérédité, on écrivait :

$M^{-(n+1)}=M^{-n}M^{-1}=\left(\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B\right)\left(\alpha^{-1}A+\beta^{-1}B\right)=\cdots$

Partie III

8)$I_3 - T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice de F avec $a = -2$ et $b = -1$. La question 6)a) donne alors :
$I_3 - T = \alpha A + \beta B = (a-b)A + (a+2b)B = -A - 4B$.

9)$I_3 - T$ est inversible d'après 7)a) car $\alpha = -1 \neq 0$ et $\beta = -4 \neq 0$.
La question 7)b) avec $n = 1$ donne :

$$\begin{aligned}(I_3 - T)^{-1} &= \alpha^{-1}A + \beta^{-1}B \\ &= -A - \frac{1}{4}B \\ &= -\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

10)$L = TL + Y \iff L - TL = Y \iff (I_3 - T)L = Y \iff L = (I_3 - T)^{-1}Y$.
D'où l'unicité de L.
De plus, $L = (I_3 - T)^{-1}Y = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11)•Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $X_{n+1} = TX_n + Y$ et $L = TL + Y$.
En soustrayant membre à membre ces égalités, on a :
$X_{n+1} - L = TX_n + Y - TL - Y = T(X_n - L)$.
• Par récurrence. On pose $\mathscr{P}(n)$: « $X_n - L = T^n(X_0 - L)$ ».
$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $X_0 - L = T^0(X_0 - L)$ », c'est vrai car $T^0 = I_3$.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Suppsons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}X_{n+1} - L &= T(X_n - L) \quad \text{début de question} \\ &= TT^n(X_0 - L) \quad \text{par HR} \\ &= T^{n+1}(X_0 - L).\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ X_n - L = T^n(X_0 - L)$

12)La question 8) donne : $I_3 - T = -A - 4B$.
Donc $T = I_3 + A + 4B = (A + B) + A + 4B = 2A + 5B$.
En remplaçant T dans l'égalité de la question 11), on conclut :

$$X_n = L + (2A + 5B)^n (X_0 - L).$$

Exercice 2 (ecricome 2022)

Partie I

1)• $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to 0^+} \left(2-\frac{1}{x}\right) = -\infty$.

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Par produit, $\lim_{x\to 0^+} \left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$.

$\lim_{t\to +\infty} e^t = +\infty$. Par composition, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.

• $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to +\infty} \left(2-\frac{1}{x}\right) = 2$.

$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$. Par produit, $\lim_{x\to +\infty} \left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$.

$\lim_{t\to +\infty} e^t = +\infty$. Par composition, $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

2)a)Les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto 2x-1$ sont strictement croissantes sur $]0,+\infty[$. Par somme, h est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b)• h est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions continues et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $h\left(]0,+\infty[\right)$.

Or, $\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$. Donc $h\left(]0,+\infty[\right) = \mathbf{R}$.

$0 \in \mathbf{R}$ admet un unique antécédent $\alpha > 0$, ce qui signifie que $h(\alpha) = 0$.

• $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 < 0$ et $h(1) = 1 > 0$.

Donc $h\left(\frac{1}{2}\right) < \underbrace{h(\alpha)}_{0} < h(1)$, puis $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, par stricte croissante de h.

c)g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ g'(x) &= \left(\left(2-\frac{1}{x}\right)'\ln x + \left(2-\frac{1}{x}\right)(\ln x)'\right) exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x\right)\\
&= \left(\frac{1}{x^2}\times \ln x + \left(2-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}\right) g(x)\\
&= \left(\frac{1}{x^2}\times \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) g(x)\\
&= \frac{1}{x^2}\left(\ln x + 2x - 1\right) g(x)\\
&= \frac{1}{x^2} h(x) g(x).
\end{aligned}$$

d)$\forall x > 0,\ g(x) > 0$ et $x^2 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $h(x)$.
Or, h est strictement croissante et s'annule en α. Donc h est négative sur $]0,\alpha[$ et positive sur $]\alpha,+\infty[$. D'où le tableau de variations de g :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3)Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) - x^2 &= exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln x\right) - x^2 \\ &= exp\left(2\ln x - \frac{\ln x}{x}\right) - x^2 \\ &= exp\left(2\ln x\right) exp\left(-\frac{\ln x}{x}\right) - x^2 \\ &= x^2 exp\left(-\frac{\ln x}{x}\right) - x^2 \\ &= x^2\left(exp\left(-\frac{\ln x}{x}\right) - 1\right). \end{aligned}$$

Or, $e^t - 1 \underset{+\infty}{\sim} t$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$. Donc $exp\left(-\frac{\ln x}{x}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x}$.

Par produit, on déduit : $x^2\left(exp\left(-\frac{\ln x}{x}\right) - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} x^2 \times \left(-\frac{\ln x}{x}\right)$.

Ainsi, $g(x) - x^2 \underset{+\infty}{\sim} -x\ln x$.

Partie II

4)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « u_n existe et $u_n > 0$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « u_0 existe et $u_0 > 0$ ». C'est vrai par énoncé.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence u_n existe et $u_n > 0$ donc $u_n \in D_g =]0, +\infty[$, ce qui assure l'existence de $g(u_n)$, c'est-à-dire de u_{n+1}.
De plus, $u_{n+1} = g(u_n) = exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln u_n\right) > 0$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n$ existe et $u_n > 0$.

5)programme

```
def suite(u0,n):
    liste=[ ]
    u=u0
    for k in range(n+1):
        liste.append(u)
        u=np.exp((2-1/u)*np.log(u))
    return liste
```

6)a)Les fonctions $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto \ln x$ s'annulent en 1, sont négatives sur $]0,1[$ et positives sur $]1,+\infty[$.
Par produit, la fonction $x \mapsto (x-1)\ln x$ s'annule en 1 et est positive sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.
Ainsi, $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ (x-1)\ln x > 0$.

b)Pour tout $x>0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)}{x} &= \frac{exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x\right)}{x} \\
&= \frac{exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x\right)}{exp\left(\ln x\right)} \\
&= exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln x - \ln x\right) \\
&= exp\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x\right) \\
&= exp\left(\frac{(x-1)\ln x}{x}\right).
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\forall x>0,\ (x-1)\ln x \geq 0$. De plus, $x>0$.

Par quotient, $\forall x>0,\ \dfrac{(x-1)\ln x}{x} > 0$.

Par croissance de l'exponentielle : $exp\left(\dfrac{(x-1)\ln x}{x}\right) \geq exp(0) = 1$.

Ainsi, $\forall x>0,\ \dfrac{g(x)}{x} \geq 1$.

c)En multipliant l'inégalité précédente, membre à membre par $x>0$, on a :
$\forall x>0,\ g(x) \geq x$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
g(x) = x &\iff \frac{g(x)}{x} = 1 \\
&\iff exp\left(\frac{(x-1)\ln x}{x}\right) = 1 \\
&\iff \frac{(x-1)\ln x}{x} = 0 \\
&\iff (x-1)\ln x = 0 \\
&\iff x = 1 \quad \text{d'après 6)a).}
\end{aligned}$$

7)On sait que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n > 0$ et que $\forall x>0,\ g(x) \geq x$.
En remplaçant x par u_n dans l'inégalité précédente, on a : $\forall n \in \mathbf{N},\ g(u_n) \geq u_n$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

8)a)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie par hypothèse prise dans la question.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Un calcul élémentaire donne : $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$ et $g(1) = 1$.

En reprenant le tableau de variations de g trouvé dans la question 2)d) et en se rappelant que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$:

x	$\frac{1}{2}$		α		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	1

Par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}$. Par lecture du tableau, on a alors : $g(\alpha) \leq g(u_n) \leq 1$, c'est-à-dire $g(\alpha) \leq u_{n+1} \leq 1$.
Or, d'après 6)b), on a : $g(\alpha) \geq \alpha$. Par recollement : $\alpha \leq u_{n+1} \leq 1$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

b)La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée (par 1). D'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Par passage à la limite dans les inégalités 8)a), on obtient : $\dfrac{1}{2} \leq L \leq 1$.

g est continue sur $]0, +\infty[$ donc en L.

D'après le théorème du point fixe, L est solution de l'équation $g(x) = x$, laquelle admet 1 comme unique solution, d'après la question 6)c). Donc $L = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

9)a)La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante. Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq u_0$. Or, $u_0 > 1$.
Par recollement, on a : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n > 1$.

b)Comme la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, sa limite quand $n \to$ existe.
Elle peut valoir soit $+\infty$, soit $L \in \mathbf{R}$.
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$. On sait que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq u_0$.

Par passage à la limite, on a alors : $L \geq u_0 > 1$ donc $L > 1$.
Or, pour les mêmes raisons que 8)b), L doit être un point fixe de g et doit donc valoir 1, ce qui est contradictoire.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

10)Supposons $0 < u_0 < \dfrac{1}{2}$.

Par stricte décroissance de g sur $[0, 1/2]$, on a : $g(u_0) > g\left(\dfrac{1}{2}\right)$, soit $u_1 > 1$.

On est ramené à la question 9). On montre que $\forall n \geq 1,\ u_n > 1$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Partie III

11)$(x,y) \mapsto y$ et $(x,y) \mapsto x$ sont polynomiales donc de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$.
Par différence et inverse, $(x,y) \mapsto \left(y - \dfrac{1}{x}\right)$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$.
$t \mapsto \ln t$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $(x,y) \mapsto x$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$.
Par composée, $(x,y) \mapsto \ln x$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$.
Par produit, $(x,y) \mapsto \left(y - \dfrac{1}{x}\right)\ln x$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$.
$t \mapsto e^t$ est de classe C^2.
Par composée, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$.

12)Pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y) &= \left(\partial_1\left(y-\frac{1}{x}\right)\ln x + \left(y-\frac{1}{x}\right)\partial_1(\ln x)\right) exp\left(\left(y-\frac{1}{x}\right)\ln x\right)\\
&= \left(\left(0+\frac{1}{x^2}\right)\ln x + \left(y-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right) f(x,y)\\
&= \frac{\ln x + xy - 1}{x^2} f(x,y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2 f(x,y) &= \left(\partial_2\left(y-\frac{1}{x}\right)\ln x + \left(y-\frac{1}{x}\right)\partial_2(\ln x)\right) exp\left(\left(y-\frac{1}{x}\right)\ln x\right)\\
&= \left((1-0)\ln x + \left(y-\frac{1}{x}\right)\times 0\right) f(x,y)\\
&= (\ln x) f(x,y).
\end{aligned}$$

13)Les points critiques (x,y) de f sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{array}\right.$$

Comme f est strictement positive sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$, le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\ln x + xy - 1}{x^2} = 0 \\ \\ \ln x = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \ln x + xy - 1 = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = 1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Donc $(1,1)$ est le seul point critique de f.

14)• f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$, elle admet des dérivées partielles d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1} f(x,y) &= \partial_1\big(\partial_1 f(x,y)\big)\\
&= \partial_1\left(\frac{\ln x + xy - 1}{x^2} f(x,y)\right)\\
&= \partial_1\left(\frac{\ln x + xy - 1}{x^2}\right) f(x,y) + \frac{\ln x + xy - 1}{x^2}\partial_1 f(x,y)\\
&= \frac{\left(\frac{1}{x}+y\right)x^2 - 2x\left(\ln x + xy - 1\right)}{x^4} f(x,y) + \frac{\ln x + xy - 1}{x^2}\partial_1 f(x,y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial^2_{2,1} f(x,y) &= \partial_2\big(\partial_1 f(x,y)\big)\\
&= \partial_2\left(\frac{\ln x + xy - 1}{x^2} f(x,y)\right)\\
&= \partial_2\left(\frac{\ln x + xy - 1}{x^2}\right) f(x,y) + \frac{\ln x + xy - 1}{x^2}\partial_2 f(x,y)\\
&= \frac{1}{x} f(x,y) + \frac{\ln x + xy - 1}{x^2}\partial_2 f(x,y)
\end{aligned}
$$

f étant de classe C^2, le théorème de Schwarz donne :

$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y)$.

$$
\begin{aligned}
\partial^2_{2,2} f(x,y) &= \partial_2\big(\partial_2 f(x,y)\big)\\
&= \partial_2\big((\ln x) f(x,y)\big)\\
&= (\ln x)\partial_2 f(x,y).
\end{aligned}
$$

• Evaluons ces dérivées secondes au point critique (1,1).

$$\partial^2_{1,1} f(1,1) = \frac{\left(\frac{1}{1}+1\right)1^2 - 2\left(\ln 1 + 1 - 1\right)}{1^4} f(1,1) + \frac{\ln 1 + 1 - 1}{1^2}\partial_1 f(1,1) = 2$$

$$\partial^2_{2,1} f(1,1) = \partial^2_{1,2} f(1,1) = \frac{1}{1} f(1,1) + \frac{\ln 1 + 1 - 1}{1^2}\partial_2 f(1,1) = f(1,1) = e^0 = 1$$

$\partial^2_{2,2} f(1,1) = (\ln 1)\partial_2 f(1,1) = 0.$

La matrice hesssienne de f au point (1,1) est :

$$H = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(1,1) & \partial^2_{1,2} f(1,1) \\ \partial^2_{2,1} f(1,1) & \partial^2_{2,2} f(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15)λ est valeur propre de H

$\Longleftrightarrow H - \lambda I$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Longleftrightarrow (2-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0.$

Le discriminant vaut $\Delta = 8 > 0$. L'équation admet donc deux racines λ_1 et λ_2 dont le produit vaut : $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{c}{a} = -1 < 0$.

λ_1 et λ_2 sont donc non nulles et de signes contraires.
f n'admet donc pas d'extrémum local en (1,1), c'est un point selle.

16)Si f possédait un extrémum global sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$, elle présenterait un extrémum local en ce point. Or, le seul point où f est susceptible de présenter un extrémum local est (1,1), point où on a vu que f ne possède pas d'extrémum local.

Donc f ne posséde pas d'extrémum global sur $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$.

Exercice 3 (ecricome 2022)

Partie I

1)a)Cherchons la loi de X_n.
L'expérience aléatoire est constituée de n épreuves successives, identiques et indépendantes où une épreuve donnée consiste à placer un jeton dans l'une des 3 urnes.
A chaque épreuve, la probabilité de succès (succès=placer le jeton dans U_1) vaut $1/3$, puisque les urnes sont choisies avec équiprobabilité.
X_n compte le nombre de fois où le jeton est placé dans U_1, c'est-à-dire le nombre de succès.
Donc $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$.
Pour les mêmes raisons, $Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$ et $Z_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$.
b)$\forall k \in [[0, n]],\ P(X_n = k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$.
En particulier, $P(X_n = 0) = \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
et $P(X_n = n) = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
c)Après avoir réparti les n premiers jetons, il y a en tout n jetons dans les urnes, ce qui se traduit par : $X_n + Y_n + Z_n = n$.
Donc $(X_n = n) = (X_n = X_n + Y_n + Z_n)$
$= (Y_n + Z_n = 0)$
$= \big((Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)\big)$ car $Y_n(\Omega) = Z_n(\Omega) = \mathbf{N}$.
d)Après n répartitions :
− l'urne 1 reste vide si l'événement $(X_n = 0)$ est réalisé,
− l'urne 2 reste vide si l'événement $(Y_n = 0)$ est réalisé,
− l'urne 3 reste vide si l'événement $(Z_n = 0)$ est réalisé.
Ainsi, $V_n = (X_n = 0) \cup (Y_n = 0) \cup (Z_n = 0)$.
e)La formule du crible donne :
$P(V_n)$
$= P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0)$
$-P\big((X_n = 0) \cap (Y_n = 0)\big) - P\big((X_n = 0) \cap (Z_n = 0)\big) - P\big((Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)\big)$
$+P\big((X_n = 0) \cap (Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)\big)$.
La question 1)b) donne du fait que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi :
$P(X_n = 0) = P(Y_n = 0) = P(Z_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$,
La question 1)c) donne :
$P\big((Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)\big) = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, puis par le même raisonnement

$P\big((X_n=0)\cap(Y_n=0)\big)=P(Z_n=n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$,

$P\big((X_n=0)\cap(Z_n=0)\big)=P(Y_n=n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Enfin, $P\big((X_n=0)\cap(Y_n=0)\cap(Z_n=0)\big)=0$ car il est impossible qu'après n répartitions, toutes les urnes soient vides.

On déduit : $P(V_n)=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

2)V est réalisé si et seulement si tous les V_n sont réalisés.

On a donc $V=\displaystyle\bigcap_{n\geq 1}V_n$.

Supposons V_{n+1} réalisé.
Alors, après les $n+1$ premières répartitions, au moins une urne reste vide. Cette urne en question était nécessairement vide après les n premières répartitions. En effet, si elle contenait un jeton, ce même jeton serait encore là, après la $n+1$-ème répartition. Donc V_n est réalisé.
Ainsi, $\forall n\in\mathbf{N}^*,\ V_{n+1}\subset V_n$.

La suite $(V_n)_{n\geq 1}$ étant décroissante, le théorème de la limite monotone s'applique et donne :

$P(V)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}V_n=\lim_{n\to+\infty}\left(3\left(\frac{2}{3}\right)^n-3\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=0.$

En effet, chacune des suites géométriques tend vers 0, du fait que sa raison est dans $]-1,1[$.

3)a)programme

```
def T():
    X=0
    Y=0
    Z=0
    n=0
    liste=[X,Y,Z]
    while liste[0]==0 or liste[1]==0 or liste[2]==0:
        i=rd.randint(0,3)
        liste[i]=liste[i]+1
        n=n+1
    return n
```

b)programme

```
s=0
for k in range(10000):
    s=s+T()
print(s/10000)
```

Ce programme affiche la moyenne des valeurs prises par T lors de 10000 expériences aléatoires, donc une valeur approchée de l'espérance de T.

4)Il faut au minimum 3 jetons pour que chaque urne contienne au moins un jeton, ce qui prouve que $T(\Omega)\subset[[3,+\infty[[$.

Réciproquement, soit $k \geq 3$ un entier.
L'événement $(T = k)$ est réalisé si par exemple, les $k-2$ premières répartitions se font dans U_1, la $k-1$-ème répartition se fait dans U_2, puis la k-ème répartition dans U_3. Donc $k \in T(\Omega)$.

Finalement, $T(\Omega) = [[3, +\infty[[$.

5)Montrons que pour tout $n \in T(\Omega)$, on a : $V_{n-1} = V_n \cup (T = n)$.

Supposons V_{n-1} réalisé. Alors, les $n-1$ premières répartitions ont laissé une urne vide. A l'issue de la n-ème répartition, deux cas sont possibles :
$-$ il y a toujours une urne vide, ce qui signifie que l'événement V_n est réalisé,
$-$ il n'y a plus d'urne vide, et comme cela se produit pour la première fois, ce qui signifie que l'évenement $(T = n)$ est réalisé.
Ainsi, $V_{n-1} \subset V_n \cup (T = n)$.

Réciproquement, on a : $V_n \subset V_{n-1}$ (voir la question 2).
On a aussi : $(T = n) \subset V_{n-1}$. En effet, si l'événement $(T = n)$ est réalisé, la n-ème répartition remplit pour la première fois toutes les urnes, ce qui entraîne que la fois d'avant, à l'issue de la $n-1$ème répartition, il y avait au moins une urne vide, ce qui réalise l'événement V_{n-1}.

Ainsi, $V_{n-1} = V_n \cup (T = n)$.

Enfin, les événements V_n et $(T = n)$ sont incompatibles car après n répartitions, on ne peut pas avoir toutes les urnes pleines et au moins une urne vide.

On conclut que $P(V_{n-1}) = P(V_n) + P(T = n)$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in T(\Omega),\ P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n).$$

6)T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 3} |kP(T = k)|$ converge, ce qui revient à la convergence de la série $\sum_{k \geq 3} kP(T = k)$, puisque $kP(T = k) \geq 0$.

Pour tout entier $k \geq 3$, on a :

$$\begin{aligned}
P(T = k) &= P(V_{k-1}) - P(V_k) \\
&= \left(3\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) - \left(3\left(\frac{2}{3}\right)^{k} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\right) \\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Pour tout entier $n \geq 3$, on déduit :

$$\sum_{k=3}^{n} kP(T = k)$$
$$= \sum_{k=3}^{n} k\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right)$$
$$= \sum_{k=3}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\sum_{k=3}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 1\left(\frac{2}{3}\right)^{0} - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{1} - 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 1\left(\frac{1}{3}\right)^{0} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{7}{3} - 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \frac{5}{3}\right) \quad (*)$$

Les séries de terme général $k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ et $k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ sont des séries dérivées premières.

Elles convergent car leur paramètre est dans $]-1,1[$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} = 9$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{9}{4}$.

En passant à la limite dans $(*)$, on a enfin :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n} kP(T=k) = 9 - \frac{7}{3} - 2\left(\frac{9}{4} - \frac{5}{3}\right) = \frac{11}{2}$.

Cette limite est finie, ce qui prouve que T admet une espérance et que $E(T) = \frac{11}{2}$.

Partie II

7)a)$X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(2, \frac{1}{3}\right)$ donc $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$.

De plus, $\forall k \in \{0,1,2\}$, $P(X_2 = k) = \binom{2}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2-k}$.

On a alors : $P(X_2 = 0) = \frac{4}{9}$, $P(X_2 = 1) = \frac{4}{9}$ et $P(X_2 = 2) = \frac{1}{9}$.

Après deux répartitions, on peut avoir 1 ou 2 urnes vides. Donc $W_2(\Omega) = \{1,2\}$.

Il y a donc 6 probabilités à calculer.

• L'événement $\big((X_2 = 0) \cap (W_2 = 2)\big)$ est réalisé si et seulement si les deux jetons ont été placés dans la même urne, cette urne pouvant être U_2 ou U_3.
Du fait de l'indépendance des répartitions, la probabilité de placer les deux jetons dans U_2 est : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$.
Il en est de même pour U_3.
Par incompatibilité, $P\big((X_2 = 0) \cap (W_2 = 2)\big) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

• L'événement $\big((X_2 = 1) \cap (W_2 = 2)\big)$ est impossible car si l'événement $(X_2 = 1)$ est réalisé, alors l'événement $(W_2 = 1)$ est réalisé, ce qui est incompatible avec la réalisation de l'événement $(W_2 = 2)$.
Donc $P\big((X_2 = 1) \cap (W_2 = 2)\big) = 0$.

• L'événement $\big((X_2 = 2) \cap (W_2 = 2)\big)$ est réalisé si et seulement si les deux jetons ont été placés dans l'urne U_1.
Donc $P\big((X_2 = 2) \cap (W_2 = 2)\big) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

• La formule des probabilités totales pour le sce $\big((W_2=1),(W_2=2)\big)$ donne :
$P(X_2=0)=P\big((X_2=0)\cap(W_2=1)\big)+P\big((X_2=0)\cap(W_2=2)\big)$.
Donc $P\big((X_2=0)\cap(W_2=1)\big)=P(X_2=0)-P\big((X_2=0)\cap(W_2=2)\big)$
$$=\frac{4}{9}-\frac{2}{9}$$
$$=\frac{2}{9}.$$
• La formule des probabilités totales pour le sce $\big((W_2=1),(W_2=2)\big)$ donne :
$P(X_2=1)=P\big((X_2=1)\cap(W_2=1)\big)+P\big((X_2=1)\cap(W_2=2)\big)$.
Donc $P\big((X_2=1)\cap(W_2=1)\big)=P(X_2=1)-P\big((X_2=1)\cap(W_2=2)\big)$
$$=\frac{4}{9}-0$$
$$=\frac{4}{9}.$$
• La formule des probabilités totales pour le sce $\big((W_2=1),(W_2=2)\big)$ donne :
$P(X_2=2)=P\big((X_2=2)\cap(W_2=1)\big)+P\big((X_2=2)\cap(W_2=2)\big)$.
Donc $P\big((X_2=2)\cap(W_2=1)\big)=P(X_2=2)-P\big((X_2=2)\cap(W_2=2)\big)$
$$=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}$$
$$=0.$$
b)La formule des probabilités totales pour le sce $\big((X_2=0),(X_2=1),(X_2=2)\big)$ donne :
$P(W_2=1)$
$=P\big((X_2=0)\cap(W_2=1)\big)+P\big((X_2=1)\cap(W_2=1)\big)+P\big((X_2=2)\cap(W_2=1)\big)$
$=\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+0$
$=\frac{2}{3}$.
Comme $\big((W_2=1),(W_2=2)\big)$ est un système complet, on déduit :
$P(W_2=2)=1-P(W_2=1)=\frac{1}{3}$.
W_2 est discrète finie. Elle admet une espérance donnée par :
$E(W_2)=1\times P(W_2=1)+2\times P(W_2=2)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$.
c)X_2 et W_2 sont discrètes finies donc le couple (X_2,W_2) possède une covariance donnée par la formule de Huygens :
$$cov(X_2,W_2)=E(X_2W_2)-E(X_2)E(W_2).$$
Comme $X_2\hookrightarrow\mathscr{B}\left(2,\frac{1}{3}\right)$, on a : $E(X_2)=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.
Puis, le théorème de transfert donne :
$E(X_2W_2)=\sum_{0\leq i,j\leq 2} ijP\big((X_2=i)\cap(W_2=j)\big)$.

Les termes étant nuls pour $i=0$ ou $j=0$, on se ramène à :
$E(X_2W_2)$
$= \displaystyle\sum_{1\le i,j\le 2} ijP\big((X_2=i)\cap(W_2=j)\big)$
$= P\big((X_2=1)\cap(W_2=1)\big) + 2P\big((X_2=1)\cap(W_2=2)\big)$
$+2P\big((X_2=2)\cap(W_2=1)\big) + 4P\big((X_2=2)\cap(W_2=2)\big).$
$= \dfrac{4}{9} + 2\times 0 + 2\times 0 + 4\times\dfrac{1}{9}$
$= \dfrac{8}{9}.$
On conclut que $cov(X_2,W_2) = \dfrac{8}{9} - \dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3} = 0.$
d)$P\big((X_2=2)\cap(W_2=1)\big) = 0$, alors que $P(X_2=2) = \dfrac{1}{9}$ et $P(W_2=1) = \dfrac{2}{3}$.
Donc $P\big((X_2=2)\cap(W_2=1)\big) \neq P(X_2=2)P(W_2=1)$.
On conclut que X_2 et W_2 ne sont pas indépendantes.
8)Soit $n\ge 3$ un entier.
Comme il y a 3 urnes et qu'après n placements, au moins une urne est non vide, on a nécessairement : $W_n(\Omega)\subset\{0,1,2\}$.
Après le placement des n premiers jetons, le nombre d'urnes vides peut valoir :
− 2 si par exemple, tous les jetons sont placés dans la même urne,
− 1 si par exemple, $n-1$ jetons sont placés dans U_1 et 1 dans U_2,
− 0 si par exemple, $n-2$ jetons sont placés dans U_1, 1 dans U_2 et 1 dans U_3.
Donc $W_n(\Omega) = \{0,1,2\}$.
9)a)Pour tout $i\in[[1,3]]$, on a : $W_{n,i}(\Omega)=\{0,1\}$. Donc $W_{n,i}$ suit la loi de Bernoulli.
$E(W_{n,1}) = P(W_{n,1}=1) = P(X_n=0) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ d'après 1)b).
De même, $E(W_{n,2}) = P(W_{n,2}=1) = P(Y_n=0) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
et $E(W_{n,3}) = P(W_{n,3}=1) = P(Z_n=0) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
Finalement, $\forall i\in[[1,3]],\ E(W_{n,i}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
b)$W_n = W_{n,1}+W_{n,2}+W_{n,3}$.
c)Par linéarité de l'espérance, $E(W_n) = E(W_{n,1})+E(W_{n,2})+E(W_{n,3}) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
• On remarque que $(X_n=n)\subset(W_n=2)$. En effet, si l'événement $(X_n=n)$ est réalisé, c'est que les n premiers jetons ont été placés dans l'urne U_1, ces mêmes jetons ne sont alors ni dans U_2, ni dans U_3. Les urnes U_2 et U_3 sont alors vides, après n placements, ce qui réalise l'événement $(W_n=2)$.
On déduit : $(X_n=n)\cap(W_n=2) = (X_n=n)$.
D'où $P\big((X_n=n)\cap(W_n=2)\big) = P(X_n=n) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
• Soit $k\in[[1,n-1]]$. Supposons l'événement $(X_n=k)$ réalisé.
Alors, après n répartitions, exactement k jetons ont été placés dans U_1. Il y a alors

$n-k>0$ jetons répartis dans les deux autres urnes, deux urnes au minimum sont alors remplies. Il ne donc y avoir deux urnes vides.
Ainsi, les événements $(X_n = k)$ et $(W_n = 2)$ sont incompatibles.

Pour tout $k \in [[1, n-1]]$, on a donc : $P\big((X_n = k) \cap (W_n = 2)\big) = 0$.

11)• Soit $k \in [[1, n-1]]$.
L'événement $(W_n = 1)$ est réalisé si après n répartitions, il reste une urne vide, c'est-à-dire si les n premiers jetons sont répartis dans deux urnes.
L'événement $(X_n = k) \cap (W_n = 1)$ est donc réalisé si après n répartitions, on est dans l'une des deux configurations suivantes :
− k jetons sont dans U_1 et $n-k$ jetons sont dans U_2,
− k jetons sont dans U_1 et $n-k$ jetons sont dans U_3.

On peut calculer la probabilité de chacune de ces configurations par la formule d'équiprobabilité : (nombre de cas favorables)/(nombres de cas possibles), ce qui impose de bien décrire l'univers.

Répartir les n jetons dans les 3 urnes revient à construire une application de l'ensemble des n jetons dans l'ensemble des 3 urnes. Il y a 3^n telles applications, puisque chacun des n jetons a 3 choix d'image. Ainsi, $card(\Omega) = 3^n$.

Réaliser la première configuration revient à choisir parmi les n jetons, les k jetons qui pour image U_1, il y a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ choix.
Ces k jetons étant choisis, on les envoie sur U_1, ce que l'on peut faire d'une seule façon. Il reste alors $n-k$ jetons à envoyer sur U_2, ce que l'on peut faire d'une seule façon aussi.

Donc la probabilité de la première configuration est : $\dfrac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{3^n}$.

C'est la même probabilité pour la deuxième configuration.

Les deux configurations étant incompatibles, on déduit :
$P\big(X_n = k) \cap (W_n = 1)\big) = \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{3^n} + \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{3^n}$.

Ainsi, $\forall k \in [[1, n-1]],\ P\big(X_n = k) \cap (W_n = 1)\big) = \dfrac{2\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{3^n}$.

• Les événements $(X_n = n)$ et $(W_n = 1)$ sont incompatibles car la réalisation du premier entraîne que les n premiers jetons sont placés dans la même urne U_1, alors que la réalisation du second entraîne que les n premiers jetons sont placés dans deux urnes différentes.
Donc $P\big((X_n = n) \cap (W_n = 1)\big) = 0$.

12)Rappelons que $X_n(\Omega) = [[0, n]]$ et $W_n(\Omega) = [[0, 2]]$.
X_n et W_n sont discrètes finies. Il en de même pour X_nW_n qui admet donc une espérance, somme double, donnée par le théorème de transfert :

$E(X_nW_n)$
$= \displaystyle\sum_{k \in [[0,n]], j \in [[0,2]]} kjP\big((X_n = k) \cap (W_n = j)\big)$.

Les termes étant nuls pour $k = 0$ ou $j = 0$, on peut se restreindre aux indices (k, j) tels que $k \in [[1, n]]$ et $j \in [[1, 2]]$.

En commençant par sommer sur les j, on a :

$E(X_nW_n)$

$$= \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} kjP\big((X_n = k) \cap (W_n = j)\big).$$

$$= \sum_{k=1}^{n} kP\big((X_n = k) \cap (W_n = 1)\big) + \sum_{k=1}^{n} 2kP\big((X_n = k) \cap (W_n = 2)\big).$$

Dans la première somme, on peut remarquer que le terme d'indice n est nul car $P\big((X_n = n) \cap (W_n = 1)\big) = 0$ d'après la question 11).

Dans la deuxième somme, les termes d'indice 1, 2, ..., $n - 1$ sont nuls car $\forall k \in [[1, n-1]],\ P\big((X_n = k) \cap (W_n = 2)\big) = 0$ d'après la question 10).

On déduit finalement :

$$E(X_nW_n) = 2nP\big((X_n = n) \cap (W_n = 2)\big) + \sum_{k=1}^{n-1} kP\big((X_n = k) \cap (W_n = 1)\big).$$

13)• Des questions 10) et 11), on conclut :

$$E(X_nW_n) = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{2\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{3^n} = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3^n}\sum_{k=1}^{n-1} k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \quad (*)$$

Il reste à calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ en remarquant que pour tout $k \in [[1, n-1]]$:

$$k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = k \times \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{k \times (n-1)!n}{(n-k)!(k-1)!k} = n\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant dans $(*)$, on conclut :

$$\begin{aligned}
E(X_nW_n) &= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3^n}\sum_{k=1}^{n-1} n\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2n}{3^n}\sum_{k=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2n}{3^n}\sum_{j=0}^{n-2} \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} \quad \text{en posant } j = k-1 \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2n}{3^n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \end{pmatrix}\right) \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2n}{3^n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} - 1\right) \\
&= \frac{2n}{3^n}\sum_{j=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} \quad \text{en développant.}
\end{aligned}$$

Enfin, la formule du binôme donne :
$\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} 1^j 1^{n-1-j} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$

On conclut :
$E(X_n W_n) = \dfrac{2n}{3^n} \times 2^{n-1} = \dfrac{n2^n}{3^n} = n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n.$

• La formule de Huygens donne :
$cov(X_n, W_n) = E(X_n W_n) - E(X_n)E(W_n) = n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - n \times \dfrac{1}{3} \times 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0.$

14)La question 11) donne : $P\big((X_n = n) \cap (W_n = 1)\big) = 0$, alors que
$P(X_n = n) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \neq 0$ et $P(W_n = 1) \neq 0$.

On a donc $P\big((X_n = n) \cap (W_n = 1)\big) \neq P(X_n = n)P(W_n = 1)$, ce qui montre que X_n et W_n ne sont pas indépendantes.

Néanmoins, on a vu que $cov(X_n, W_n) = 0$.

On voit donc que le fait que la covariance de deux variables aléatoires soit nulle n'entraîne pas que ces variables aléatoires sont indépendantes. C'est la réciproque uniquement qui est vraie !