Exercice 1 (ecricome 2024)

Partie I

1)a)Soit $k \in \mathbf{N}$. Comme X prend ses valeurs dans $\mathbf{N}^*$, l'événement $(X > k)$ est la réunion des événements incompatibles $(X = j)_{j \geq k+1}$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } P(X > k) &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(X = j) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} (1-p)^{j-1} p \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{n+k} p \quad \text{en posant } n = j - k - 1 \\
&= p(1-p)^k \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n \\
&= p(1-p)^k \times \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^k.
\end{aligned}$$

b)$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \dfrac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \dfrac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} = 1 - p.$

2)a)Soit $k \in \mathbf{N}^*$.
Comme X prend des valeurs entières, $X > k-1 \Longleftrightarrow X = k$ ou $X > k$.
Ainsi, l'événement $(X > k-1)$ est la réunion des événements $(X = k)$ et $(X > k)$. Par incompatibilité, on a : $P(X > k-1) = P(X = k) + P(X > k)$ puis, $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$.

On a donc $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k)$.

b)Supposons que $\forall k \in \mathbf{N},\ R_X(k) = R_Y(k)$.
En faisant $k \to k-1$, on a alors $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ R_X(k-1) = R_Y(k-1)$.
La question précédente donne ensuite par différence :
$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(X = k) = P(Y = k)$ donc X et Y ont même loi.

Réciproquement, supposons que X et Y ont même loi. Pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
R_X(k) &= P(X > k) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(X = j) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(Y = j) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \\
&= P(Y > k) \\
&= R_Y(k).
\end{aligned}$$

Partie II

3)a)$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \dfrac{n+1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{(n+1!)} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

b)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \quad \text{d'après 3)a)}$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{par télescopage.}$$

D'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1.$

Cette limite est finie, ce qui prouve que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ converge.

De plus, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$

4)a)D'après le théorème de transfert, $X+1$ admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(n+1)P(X=n)$ est absolument convergente.

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\Big|\underbrace{(k+1)P(X=k)}_{\geq 0}\Big| = (k+1) \times \frac{k}{(k+1)!} = \frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big|(k+1)P(X=k)\big| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1^j}{j!}.$

On reconnaît la somme partielle d'ordre $n-1$ de la série exponentielle de paramètre 1, série convergente.
Donc $X+1$ admet une espérance.

En reprenant les calculs faits plus haut, on a :

$$E(X+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)P(X=k) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (k+1)P(X=k)$$

$$= \cdots = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1^j}{j!} = e^1 = e.$$

En écrivant $X = (X+1)-1$, on déduit que X admet une espérance.
De plus, $E(X) = E(X+1) - 1 = e - 1$.

b)D'après le théorème de transfert, $(X-1)(X+1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(n-1)(n+1)P(X=n)$ est absolument convergente.

Pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\big|\underbrace{(k-1)(k+1)P(X=k)}_{\geq 0}\big| = (k-1)(k+1) \times \frac{k}{(k+1)!} = \frac{k-1}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-2)!}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big|(k-1)(k+1)P(X=k)\big| = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{(k-1)!}$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1^j}{j!}.$$

On reconnaît la somme partielle d'ordre $n-2$ de la série exponentielle de paramètre 1, série convergente.

Donc $(X-1)(X+1)$ admet une espérance.

En reprenant les calculs faits plus haut, on a :

$$E\big((X-1)(X+1)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)(k+1)P(X=k)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+1)P(X=k) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1^j}{j!} = e^1 = e.$$

En écrivant $X^2 = (X-1)(X+1)+1$, on déduit que X^2 admet une espérance. De plus, $E(X^2) = E\big((X-1)(X+1)\big) + 1 = e+1$.

Enfin, d'après Koenig, X admet une variance donnée par :

$V(X) = E\big(X^2\big) - E(X)^2 = (e+1) - (e-1)^2 = 3e - e^2$.

Partie III

5)Pour tout $k \in \mathbf{N}$, notons F_k = ≪ l'appareil fonctionne à l'issue de la k-ème année ≫.

On peut remarquer que l'événement F_k se réalise si et seulement si la durée de vie de l'appareil est supérieure à k. Ainsi, $F_k = (X > k)$.

On peut remarquer également que $F_k \subset F_{k-1}$. Ainsi, $F_k = F_{k-1} \cap F_k$.

On déduit pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned} R_X(k) &= P(X > k) \\ &= P(F_k) \\ &= P(F_{k-1} \cap F_k) \\ &= P_{F_{k-1}}(F_k)P(F_{k-1}) \\ &= (1-\alpha_k)P(X > k-1) \\ &= (1-\alpha_k)R_X(k-1). \end{aligned}$$

6)Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

On vient de voir que $\forall i \in \mathbf{N}^*,\ R_X(i) = (1-\alpha_i)R_X(i-1)$.

En multipliant membre à membre ces égalités pour $i \in [[1,k]]$, on a :

$$\prod_{i=1}^{k} R_X(i) = \prod_{i=1}^{k} \big((1-\alpha_i)R_X(i-1)\big)$$
$$\prod_{i=1}^{k} R_X(i) = \prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i)\prod_{i=1}^{k} R_X(i-1)$$
$$R_X(1)\cdots R_X(k-1)R_X(k) = \left(\prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i)\right) R_X(0)R_X(1)\cdots R_X(k-1).$$
Par télescopage, on déduit :
$$R_X(k) = \left(\prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i)\right) R_X(0).$$
Or, $R_X(0) = P(X>0) = 1$ puisque X est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ R_X(k) = \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i)$.

Remarque
On pouvait aussi faire une récurrence sur k.

7)Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned}
P(X=k) &= R_X(k-1) - R_X(k) \quad \text{d'après 2)a)}\\
&= \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i) - \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i) \quad \text{d'après 6)}\\
&= \prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i) - (1-\alpha_k)\prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i)\\
&= \big(1-(1-\alpha_k)\big)\prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i)\\
&= \alpha_k\prod_{i=1}^{k-1}(1-\alpha_i).
\end{aligned}$$
8)a)Si $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \alpha_k = p$, alors la question 7) donne :

$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(X=k) = p\prod_{i=1}^{k-1}(1-p) = p(1-p)^{k-1}$. Donc $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

b)Si $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \alpha_k = \dfrac{k}{k+1}$, alors la question 7) donne :
$$P(X=k) = \frac{k}{k+1}\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{i}{i+1}) = \frac{k}{k+1}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i+1} = \frac{k}{k+1}\times\frac{1}{k!} = \frac{k}{(k+1)!}$$
Et on retrouve la loi de la partie II...

Partie IV

9)a)On compte le nombre total d'enregistrements de la table `ordinateur` :

```
SELECT COUNT (*) FROM ordinateur
```

b)On ne garde que les enregistrements pour lesquels l'année de panne vaut un de plus que l'année de fabrication :

```
SELECT COUNT (*) FROM ordinateur
WHERE annee _ panne = annee _ fabrication +1
```

c)Comme on suppose que la durée de vie X d'un ordinateur suit la loi $\mathscr{G}(p)$, on a en particulier : $P(X = 1) = p$.

La fréquence de l'événement $(X = 1)$ est égale au quotient du nombre d'enregistrements trouvés en 9)b) par le nombre d'enregistrements trouvés en 9)a). En vertu de la loi des grands nombres, cette fréquence est proche de p, sous réserve d'avoir un grand nombre d'ordinateurs.

10)Il faut mettre à jour la colonne `duree _ vie` en y mettant la durée de vie effective de l'ordinateur lorsque celui-ci n'est plus en état de marche, c'est-à-dire lorsque l'année de panne est différente de -1 :

```
UPDATE ordinateur SET duree _ vie = annee _ panne - annee _ fabrication
WHERE annee _ panne <> −1
```

11)a)Notons X la variable aléatoire égale à la durée de vie d'un ordinateur.
La requête `SELECT AVG(duree _ vie) FROM ordinateur` renvoie la durée de vie moyenne des ordinateurs. D'après la loi faible des grands nombres, elle est proche de l'espérance de X, sous réserve d'un grand nombre d'ordinateurs.
En supposant que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, on a alors : $E(X) = 1/p$.
Pour trouver une valeur approchée de p, on prend donc l'inverse de la valeur renvoyée par la requête.

b)Pour $k \in [[1, 24]]$, la requête `SELECT COUNT (*)/10000 FROM ordinateur WHERE duree  underline  vie = k` renvoie la proportion d'ordinateurs ayant une durée de vie de k années, elle est proche de $P(X = k)$.
Or, pour que X suive la loi géométrique de paramètre p, il faut que
$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(X = k + 1) = pP(X = k)$.
Les valeurs successives renvoyées par les 24 requêtes doivent donc être en progression géométrique de raison p.

Exercice 2 (ecricome 2024)

Partie I

1)a)Montrons que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-2at-t^2}=0$.

On peut déjà remarquer que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-2at-t^2}=0$ puisque $-2at-t^2 \underset{+\infty}{\sim} -t^2$.

La limite étudiée est donc une forme indéterminée « $+\infty\times 0$ ».

On transforme l'expression en utilisant la forme canonique de t^2+2at.

$\forall t\in\mathbf{R},\ t^2e^{-2at-t^2}=t^2e^{-(t^2+2at)}=t^2e^{-\left((t+a)^2-a^2\right)}=\dfrac{e^{a^2}t^2}{e^{(t+a)^2}}$.

En posant $u=t+a$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} t^2e^{-2at-t^2} &= \lim_{u\to+\infty}\frac{e^{a^2}(u-a)^2}{e^{u^2}}\\ &= \lim_{u\to+\infty}\frac{e^{a^2}u^2}{e^{u^2}} \quad \text{car } (u-a)^2\underset{+\infty}{\sim}u^2\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{a^2}x}{e^{x}} \quad \text{en posant } x=u^2\\ &= 0 \quad \text{par croissances comparées.}\end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{-2at-t^2}}{1/t^2}=0$, ce qui prouve que $e^{-2at-t^2}\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Remarque

La suggestion du collègue Fréderic Gaunard est un peu plus simple en écrivant :

$\forall t\in\mathbf{R},\ t^2e^{-2at-t^2}=t^2e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}-2at}$.

On conclut en justifiant que $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}-2at}=0$.

b)$e^{-2at-t^2}\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann avec $\alpha=2>1$).

D'après le critère de négligeabilité sur les intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-2at-t^2}dt$ converge.

Enfin, $\displaystyle\int_0^1 e^{-2at-t^2}dt$ converge car $t\mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $[0,1]$.

D'après la propriété de Chasles, $J_a=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2at-t^2}dt$ converge.

Remarque

Attention de bien s'éloigner de zéro lors de l'utilisation de critère de convergence.

En effet, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ diverge (en zéro) !

2)Soit $x \in \mathbf{R}$.
Remarquons que $\forall t \geq x,\ e^{2a(x-t)-t^2} = e^{2ax-2at-t^2} = e^{2ax}e^{-2at-t^2}$.
Comme e^{2ax} est une constante, vis-à-vis de la variable d'intégration t, l'intégrale $I_a(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}dt$ a même nature que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt$.
Or, $\displaystyle\int_x^0 e^{-2at-t^2}dt$ converge car $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $[x,0]$ ou $[0,x]$.
Et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt = J_a$ converge d'après 1)b).
D'après la propriété de Chasles, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt$ converge.
Donc $I_a(x)$ converge.
Ainsi, I_a est bien définie sur $\mathbf{R}$.
3)a)D'après la relation de Chasles, on a :
$$\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt - \int_0^{x} e^{-2at-t^2}dt = J_a - \int_0^{x} e^{-2at-t^2}dt.$$
Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} e^{-2at-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt = J_a$ car J_a est convergente.
En passant à la limite, on déduit : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}dt = J_a - J_a = 0$.
b)Soit $x \in \mathbf{R}$.
Pour tout $t \geq x$, on a du fait que a est positif : $2a(x-t) \leq 0$.
Donc $2a(x-t) - t^2 \leq -t^2$, puis $e^{2a(x-t)-t^2} \leq e^{-t^2}$ par croissance de l'exponentielle.
En intégrant entre les bornes croissantes x et $+\infty$, on a :
$$\int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}dt \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$
Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R},\ I_a(x) \leq \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$.
c)On distingue deux cas :
- $a > 0$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto e^{2a(x-t)-t^2}$ est positive sur $[x, +\infty]$.
En intégrant selon les bornes croissantes x et $+\infty$:
$\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2}dt \geq 0$, c'est-à-dire : $I_a(x) \geq 0$.
Compte tenu de 3)b), on a alors $\forall x \in \mathbf{R},\ 0 \leq I_a(x) \leq \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt = 0$ en appliquant la question 3)a) avec $a = 0$.
D'après la propriété des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$.

• $a \leq 0$
On écrit pour tout $\forall x \in \mathbf{R}$:
$I_a(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt = \int_x^{+\infty} e^{2ax} e^{-2at-t^2} dt = e^{2ax} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt.$
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{2ax} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$
Par produit, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$.

Partie II

4)D'après le cours, les solutions de l'équation homogène (2) sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{2ax}$ où $\lambda \in \mathbf{R}$.

5)a)La fonction $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}$.
Donc F_a est une primitive sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto e^{-2ax-x^2}$.
F_a est donc dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R},\ F_a'(x) = e^{-2ax-x^2}$.

b)En reprenant le calcul fait dans la question 3)c), on a pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} I_a(x) &= e^{2ax} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt \\ &= e^{2ax} \left(\int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt - \int_0^x e^{-2at-t^2} dt \right) \\ &= e^{2ax} \big(J_a - F_a(x) \big). \end{aligned}$$

c)I_a est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme composée, produit et différence de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R},\ I_a'(x) &= 2ae^{2ax}\big(J_a - F_a(x)\big) + e^{2ax}\big(0 - F_a'(x)\big) \\ &= 2ae^{2ax}\big(J_a - F_a(x)\big) - e^{2ax} e^{-2ax-x^2} \\ &= 2aI_a(x) - e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Donc I_a est bien solution de l'équation différentielle (1).

6)D'après le cours, les solutions de (1) sont les solutions de (2) auxquelles on ajoute une solution particulière de (1) donc par exemple I_a.

Ainsi, les solutions de (1) sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{2ax} + I_a(x)$ où $\lambda \in \mathbf{R}$.

7)a)On suppose $a < 0$.
On a alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{2ax} = 0$ et comme on a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$, on a par somme : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(e^{2ax} + I_a(x)\big) = 0$.

Ainsi, toutes les solutions trouvées en 6) conviennent.

b)On suppose $a = 0$.
Les solutions de (1) sont donc $x \mapsto \lambda + I_0(x)$ où $\lambda \in \mathbf{R}$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_0(x) = 0$, il est nécessaire de prendre $\lambda = 0$ pour que la

solution de (1) tende vers 0 quand $x \to +\infty$.
La seule solution convenant est donc I_0.

c)On suppose $a > 0$
On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2ax} = +\infty$ et toujours $\lim\limits_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$.

Pour que la solution de (1) tende vers 0 quand $x \to +\infty$, il est donc nécessaire de prendre $\lambda = 0$.

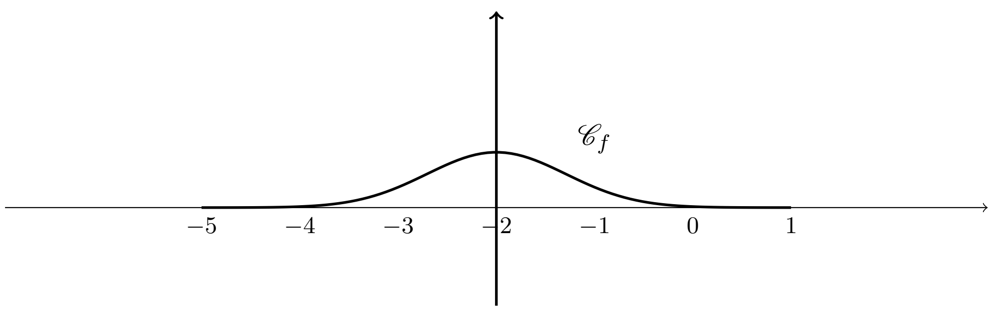
Ainsi, la seule solution convenant est I_a.

Partie III

8)a)$X \hookrightarrow \mathscr{N}\left(-a, \dfrac{1}{2}\right)$. Une densité f de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+a}{\sqrt{1/2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+a)^2}.$$

b)Dans le cas où $a = 2$, on obtient une gaussienne ayant la droite d'équation $x = -2$ comme axe de symétrie.



9)a)Le cours donne : $\forall x \in \mathbf{R},\ P(X \geq x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-(t+a)^2} dt$.

$$\begin{aligned}
\text{b)}I_a(x) &= \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt \\
&= \int_x^{+\infty} e^{2ax-2at-t^2} dt \\
&= \int_x^{+\infty} e^{2ax} e^{-(t^2+2at)} dt \\
&= e^{2ax} \int_x^{+\infty} e^{-\left[(t+a)^2-a^2\right]} dt \\
&= e^{2ax} e^{a^2} \int_x^{+\infty} e^{-(t+a)^2} dt \\
&= \sqrt{\pi} e^{2ax+a^2} P(X \geq x) \quad \text{en utilisant 9)a)}
\end{aligned}$$

10)a)Par énoncé, $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Par transformation affine de loi normale, la variable aléatoire $\alpha Z+\beta$ suit également une loi normale.

$\alpha Z+\beta$ suit la même loi que X

$\Longleftrightarrow \alpha Z+\beta$ et X ont les mêmes paramètres

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} E(\alpha Z+\beta)=E(X) \\ V(\alpha Z+\beta)=V(X) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha E(Z)+\beta=-a \\ \alpha^2 V(Z)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha\times 0+\beta=-a \\ \alpha^2\times 1=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta=-a \\ \alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{array}\right.$$

On peut prendre par exemple $\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ et $\beta=-a$.

b)programme Python :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def estim_proba(a,x):
    num=0
    for i in range(10000):
        Z=rd.normal()
        X=-a+Z/np.sqrt(2)
        if X>=x:
            num=num+1
    return num/10000
```

La fonction renvoie la fréquence de réalisation de l'événement $(X\geq x)$ lors de 10000 épreuves. Comme ce nombre est grand, en vertu de la loi faible des grands nombres, cette fréquence est proche de la probabilité théorique de l'événement $(X\geq x)$.

11)programme Python :

```
def approx_I(a,x):
    return np.sqrt(np.pi)*np.exp(2*a*x+a**2)*estim_proba(a,x)
```

Exercice 3 (ecricome 2024)

Partie I

1)a)M est symétrique donc diagonalisable.

b)$M+I=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, puis $(M+I)^2=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$.

On constate que $(M+I)^2=3(M+I)$, ce qui en développant donne :
$M^2+2M+I=3M+3I$, soit $M^2-M-2I=0$.
Posons $P(X)=X^2-X-2$. On a : $P(M)=M^2-M-2I=0$.
Donc P est un polynôme annulateur de M.

c)• D'après le cours, $sp(M)\subset\{\text{racines de }P\}$.
Les racines de P sont -1 et 2. Donc $sp(M)\subset\{-1,2\}$.
Les seules valeurs propres possibles de M sont donc -1 et 2.

• $E_{-1}(M)=\{U\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})\mid (M+I)U=0\}$. Posons $U=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$(M+I)U=0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow x+y+z=0$

$\Longleftrightarrow x=-y-z$.

Donc $E_{-1}(M)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid x=-y-z\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix},(y,z)\in\mathbf{R}^2\right\}$.

$=\left\{y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},(y,z)\in\mathbf{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

$E_{-1}(M)$ n'est pas nul donc -1 est valeur propre de M.

De plus, $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $E_{-1}(M)$.

Elle est libre (vecteurs non colinéaires). C'est donc une base de $E_{-1}(M)$.

• $E_2(M)=\{U\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})\mid (M-2I)U=0\}$. Posons $U=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$(M-2I)U=0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}-2x+y+z=0 & L_1\\ x-2y+z=0 & L_2\\ x+y-2z=0 & L_3\end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{lr} -2x+y+z=0 & L_1 \\ -3y+3z=0 & L_2 \leftarrow L_1+2L_2 \\ 3y-3z=0 & L_3 \leftarrow L_1+2L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=z \\ y=z \end{array}\right.$$

Donc $E_2(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x=y=z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\}$.

$= \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$E_2(M)$ n'est pas nul donc 2 est valeur propre de M.

De plus, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_2(M)$.

Elle est libre (un seul vecteur non nul). C'est donc une base de $E_2(M)$.

d)On effectue la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1+L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2+L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 3L_1-L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2-2L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2+L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/3 \\ L_2 \leftarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow L_3/3 \end{array}$$

Remarque

On pouvait aussi calculer $P\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et vérifier que ça fait I.

e)$D = P^{-1}MP = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Donc $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

f)Remarquons tout d'abord que $D = P^{-1}MP \iff M = PDP^{-1}$.

Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $M^k = PD^kP^{-1}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $M^0 = PD^0P^{-1}$ », ce qui est vrai puisque $M^0 = D^0 = I$.

Soit $k \in \mathbf{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^kM \\ &= PD^kP^{-1}PDP^{-1} \quad \text{par HR} \\ &= PD^kDP^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N},\ M^k = PD^kP^{-1}$.

g)Soit $k \in \mathbf{N}$.

L'égalité $M^k = a_kM + b_kI$ donne : $PD^kP^{-1} = a_kPDP^{-1} + b_kPIP^{-1}$.

C'est-à-dire, $PD^kP^{-1} = P\big(a_kD + b_kI\big)P^{-1}$.

Puis, en multipliant à droite par P et à gauche par P^{-1} : $D^k = a_kD + b_kI$.

Il reste alors à calculer les deux membres :

$$D^k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

$$a_kD+b_kI = a_k\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+b_k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_k+b_k & 0 & 0 \\ 0 & -a_k+b_k & 0 \\ 0 & 0 & 2a_k+b_k \end{pmatrix}.$$

En identifiant : $\begin{cases} -a_k + b_k = (-1)^k \\ 2a_k + b_k = 2^k \end{cases}$

Ce qui mène à : $\begin{cases} a_k = \dfrac{(-1)^{k+1} + 2^k}{3} \\[2ex] b_k = \dfrac{2(-1)^k + 2^k}{3} \end{cases}$

2)a)On remarque tout d'abord que :

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & . & . & . & n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ n & . & . & . & n \end{pmatrix} = nJ_n.$$

Puis, on fait une récurrence.

Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $J_n^k = n^{k-1}J_n$ ».

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $J_n = n^0 J_n$ », ce qui est vrai.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} J_n^{k+1} &= J_n^k J_n \\ &= \big(n^{k-1}J_n\big)J_n \quad \text{par HR} \\ &= n^{k-1}J_n^2 \\ &= n^{k-1}\big(nJ_n\big) \quad \text{d'après la remarque préliminaire} \\ &= n^k J_n. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ J_n^k = n^{k-1}J_n$.

b)On a clairement : $M_n = J_n - I_n$.

c)Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

Comme J_n et $-I_n$ commutent, la formule du binôme s'applique et donne :

$$\begin{aligned} M_n^k &= \big(J_n - I_n\big)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} J_n^i \big(-I_n\big)^{k-i} \\ &= \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} J_n^0 \big(-I_n\big)^k + \sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} J_n^i \big(-I_n\big)^{k-i} \\ &= (-1)^k I_n + \sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} n^{i-1} J_n (-1)^{k-i} I_n \quad \text{d'après 2)a)} \\ &= (-1)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} n^{i-1} (-1)^{k-i} \right) J_n \quad \text{d'après 2)a)} \\ &= (-1)^k I_n + c_k J_n \\ &= c_k J_n + (-1)^k I_n. \end{aligned}$$

avec $c_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} n^{i-1}(-1)^{k-i}$.

d)On part de l'expression de c_k.

$$
\begin{aligned}
c_k &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^i n^{-1} (-1)^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} - \binom{k}{0} n^0 (-1)^k \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} + (-1)^{k+1} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left((n-1)^k + (-1)^{k+1} \right) \quad \text{d'après la formule du binôme} \\
&= \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.
\end{aligned}
$$

e)Pour une matrice M quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, notons $\big[M\big]_{ij}$, le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M.

Utilisons l'expression trouvée en 2)c) et distinguons deux cas :

• $i \neq j$

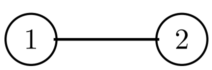
$\big[M_n^k\big]_{ij} = c_k \big[J_n\big]_{ij} + (-1)^k \big[I_n\big]_{ij} = c_k \times 1 + (-1)^k \times 0 = c_k.$

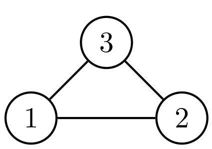
• $i = j$

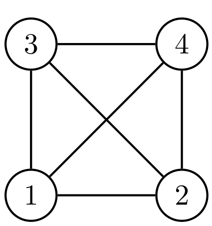
$\big[M_n^k\big]_{ii} = c_k \big[J_n\big]_{ii} + (-1)^k \big[I_n\big]_{ii} = c_k \times 1 + (-1)^k \times 1 = c_k + (-1)^k.$

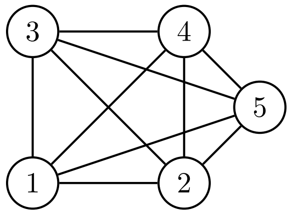
Partie II

3)Graphes K_2, K_3, K_4 et K_5 :









4)a)Le coefficient situé sur la i-ème ligne et j-ème colonne de la matrice d'adjacence de K_n correspond au nombre d'arêtes joignant le sommet i au sommet j.
Le graphe K_n étant complet et simple, il y a :
− une et une seule arête joignant le sommet i au sommet j, lorsque $i \neq j$,
− aucune arête joignant le sommet i au sommet i.

Ainsi, la matrice d'adjacence de K_n est M_n.

b)Dans le graphe K_4, le nombre de chaînes de longueur 4 allant du sommet 1 à lui-même est égal à :

$$\begin{aligned}\left[M_4^4\right]_{1,1} &= c_4 + (-1)^4 \quad \text{d'après 2)e)}\\ &= \frac{(4-1)^4 + (-1)^5}{4} + (-1)^4 \quad \text{d'après 2)d)}\\ &= \frac{81-1}{4} + 1\\ &= 21.\end{aligned}$$

5)Le degré d'un sommet de K_n est égale au nombre d'arêtes issues de ce sommet. Il vaut $n-1$ puisque ce sommet possède $n-1$ sommets adjacents et que K_n est complet.

6)Notons S l'ensemble des sommets de K_n. D'après le lemme des poignées de mains, le nombre d'arêtes de K_n vaut :

$$\frac{1}{2}\sum_{s\in S} deg(s) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Partie III

7)• A l'étape $k=0$, on est au sommet 1, ce qui signifie que X_0 est certaine et égale à 1.
On a donc $P(X_0 = 1) = 1$ et $\forall i \in [[2,n]],\ P(X_0 = i) = 0$.
Ainsi, $V_0 = (1, 0, ..., 0)$.

• Partant du sommet 1, on peut se retrouver après l'étape 1 sur les sommets 2, ..., n avec équiprobabilité. Donc $X_1 \hookrightarrow \mathscr{U}[[2,n]]$.
On a donc $P(X_1 = 1) = 0$ et $\forall i \in [[2,n]],\ P(X_1 = i) = \dfrac{1}{n-1}$.
Ainsi, $V_1 = \left(0, \dfrac{1}{n-1}, ..., \dfrac{1}{n-1}\right)$.

8)Le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice de transition T_n est : $P_{(X_k=i)}(X_{k+1}=j)$.

Si $i \neq j$, cette probabilité vaut $\dfrac{1}{n-1}$ car si on est au sommet i à l'étape k, on a une chance sur $n-1$ d'être au sommet j à l'étape $k+1$.

Si $i=j$, cette probabilité est nulle, puisque le modèle impose de changer de sommet d'une étape à l'autre.

La matrice de transition vaut finalement $T_n = \dfrac{1}{n-1}M_n$.

9)a)Un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une matrice ligne $S \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ qui vérifie $ST_n = S$.

b)$\begin{aligned}[t] VT_n &= \left(\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n-1}M_n \\ &= \frac{1}{n(n-1)}(1,...,1)M_n \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left(n-1,...,n-1\right) \\ &= \left(\frac{1}{n},...,\frac{1}{n}\right) \\ &= V. \end{aligned}$

Donc V est un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

10)a)Par la formule des probabilités totales, on peut montrer que $\forall k \in \mathbf{N},\ V_{k+1} = V_k T_n$, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ V_{k+1} = \frac{1}{n-1}V_k M_n.$$

b)On fait une récurrence.

Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $V_k = \dfrac{1}{(n-1)^k}V_0\left(M_n\right)^k$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $V_0 = V_0\left(M_n\right)^0$ », ce qui est vrai puisque $\left(M_n\right)^0 = I_n$.

Soit $k \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

$\begin{aligned}[t] V_{k+1} &= \frac{1}{n-1}V_k M_n \quad \text{d'après 10)a)} \\ &= \frac{1}{n-1}\times\frac{1}{(n-1)^k}V_0\left(M_n\right)^k M_n \quad \text{par HR} \\ &= \frac{1}{(n-1)^{k+1}}V_0\left(M_n\right)^{k+1}. \end{aligned}$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k \in \mathbf{N},\ V_k = \dfrac{1}{(n-1)^k}V_0\left(M_n\right)^k$.

c)Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, cherchons $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = i)$.

Distinguons plusieurs cas :

• $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} P(X_k = i) &= [V_k]_i \\ &= \left[\frac{1}{(n-1)^k} V_0 \left(M_n\right)^k\right]_i \quad \text{d'après 10)b)} \\ &= \frac{1}{(n-1)^k} \left[V_0 \left(M_n\right)^k\right]_i \\ &= \frac{1}{(n-1)^k} \sum_{j=1}^{n} [V_0]_j \left[\left(M_n\right)^k\right]_{ji} \\ &= \frac{1}{(n-1)^k} \left[\left(M_n\right)^k\right]_{1i} \quad \text{car } V_0 = (1, 0, ..., 0) \end{aligned}$$

Or, d'après 2)d) et 2)e), on a :

$$\left[\left(M_n\right)^k\right]_{1i} = \begin{cases} \dfrac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} & \text{si } i \neq 1 \\ \\ \dfrac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} + (-1)^k & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

Après quelques petits calculs, on déduit en divisant par $(n-1)^k$:

$$P(X_k = i) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{-1}{n-1}\right)^k & \text{si } i \neq 1 \\ \\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{-1}{n-1}\right)^k + \left(\dfrac{-1}{n-1}\right)^k & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

Prenons $n \geq 3$.

On a : $-1 < \dfrac{-1}{n-1} < 0$, ce qui entraîne $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\dfrac{-1}{n-1}\right)^k = 0$.

D'où $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = i) = \dfrac{1}{n}$.

• $i > n$ ou $i < 1$

Comme $X_k(\Omega) = [[1, n]]$, on a : $P(X_k = i) = 0$ donc $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = i) = 0$.

Conclusion :

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([[1, n]]\right)$.

On a alors $X(\Omega) = [[1, n]]$ et $\forall i \in [[1, n]],\ P(X = i) = \dfrac{1}{n}$.

Les calculs ci-dessus prouvent que $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = i) = P(X = i)$.

Ainsi, la suite $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge en loi vers X où $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([[1, n]]\right)$.

Remarque

Si $n = 2$, alors $\left(\frac{-1}{n-1}\right)^k = (-1)^k$ n'a pas de limite quand $k \to +\infty$.

Et il ne peut donc pas y avoir de convergence en loi.
Petite imprécision du sujet donc.

11)Les questions 9)b) et 10)c) prouvent que $\lim\limits_{k \to +\infty} V_k = V$.

La chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge donc vers son état stable.