Ecricome, voie E.
Epreuve de mathématiques du 12 avril 2017.

réécrit en Python par Nicolas Damien

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1, 1[, \varphi(x) = \sqrt{1 + x}$.

4. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, 1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$
6. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
7. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
   Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vetoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.
Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1, 0, 1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   (b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

9. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :
   $$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
   où a, b et c sont trois réels.
   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.
10. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.
11. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0, \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.
   On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.
3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
   Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}^{+*})^2$ par :
$$\forall (x, y) \in U, \; f(x, y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a.$$

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
5. Calculer les dérivées partielles premières de f.
6. Démontrer que pour tout $(x, y) \in U$:
   $$(x, y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$
7. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et $z_2, z_2)$, où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.
   Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : $z_1, z_1)$ et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.
9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1). Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :
$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2{z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{{z_1}^2} - a^2{z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{{z_1}^2} - a^2{z_1}^{2a-2} & -a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.$$
10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
    Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.
11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
    Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?
12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
    Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :
$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$
On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
   (b) Calculer $\mathrm{P}(T_n = 1)$.
   (c) Montrer que :
   $$\mathrm{P}(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $\mathrm{E}(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.
   (b) En utilisation un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :
   $$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathrm{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathrm{P}(S_k = j).$$
7. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:
   $$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$
   (c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :
   $$\text{« } \forall i \in [\![k, n]\!],\ \mathrm{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \text{ ».}$$
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.
8. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
   (b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathrm{P}(T_n > k) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n-1}{k}$.
9. Démontrer que $\mathrm{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(T_n > k)$, puis que $\mathrm{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.
10. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}(T_n)$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variable $(T_n)_{n \geq 1}$ obtenue.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(Y = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.
    (a) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(Y = k) = 1$.
    (b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.
12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :
    $$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(T_n > k) = \frac{1}{k!}.$$
13. Démontrer alors que $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.

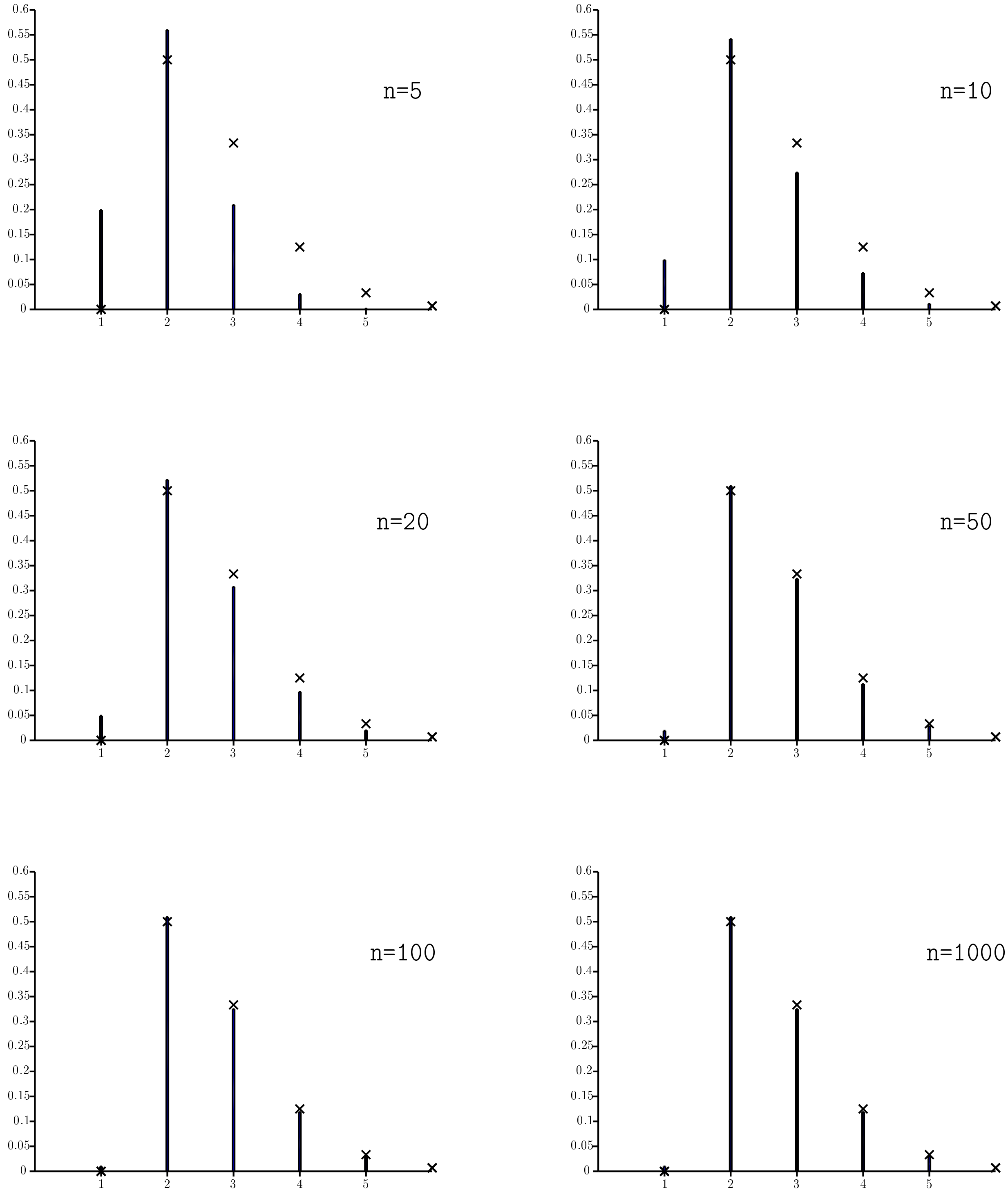
14. On rappelle qu'en langage Python, l'instruction `randint(1,n+1)` du module `numpy.random` renvoie uniformément un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

```
from numpy.random import randint
def T(n):
    S=.............
    y=.............
    while .........
        tirage=randint(1,n+1)
        print(tirage)
        S=S+tirage
        y=.........
    return y
```

15. On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

```
from math import factorial
import matplotlib.pyplot as plt
def freqT(n):
    y=[0 for j in range(n+1)]
    for i in range(100000):
        k=T(n)
        y[k]=y[k]+1
    y=[y[k]/100000 for k in range(n+1)]
    return y
def loitheoY(n):
    y=[0 for j in range(n+1)]
    for k in range(1,n+1):
        y[k]=(k-1)/factorial(k)
    return y
n=int(input('n=?'))
x=[k for k in range(n+1)]
#représentation de la loi de Y à l'aide de croix
y=loitheoY(n)
plt.scatter(x,y,20)
#représentation de la loi de Tn à l'aide d'un diagramme en batons
z=freqT(n)
plt.bar(x,z,0.05)
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous :



(a) Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

(b) Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question 13.