# Correction DM4

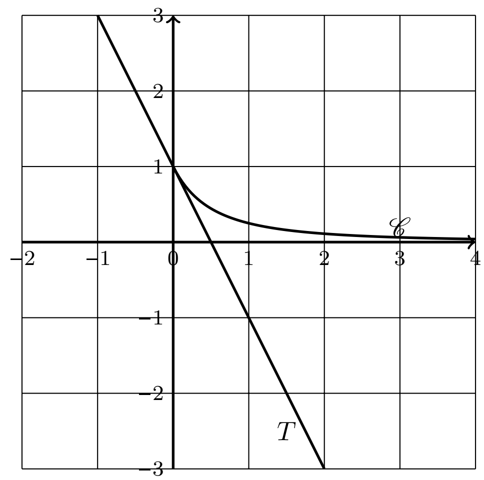
Exercice 1 (extrait ecricome 2016)

1)a)$g_0$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \geq 0 : g_0'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^3} < 0$.

Donc $g_0$ est décroissante sur $[0,+\infty[$.

1)b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)^2 = +\infty$ donc par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} g_0(x) = 0$.

La tangente $T$ en 0 à $g_0$ a pour équation : $y = g_0'(0)x + g_0(0)$, soit $y = -2x+1$.




2)a)$g_n$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme quotient, puissance et composée de fonctions dérivables et pour tout $x \geq 0$ :

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \frac{n\frac{1}{1+x}(ln(1+x))^{n-1}(1+x)^2 - 2(1+x)(ln(1+x))^n}{(1+x)^4}. \\ &= \frac{(\ln(1+x))^{n-1}[n-2\ln(1+x)]}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

Pour tout $x \geq 0 : 1+x \geq 0$, $\ln(1+x) \geq 0$ et $(1+x)^3 > 0$.

Donc $g_n'(x) \geq 0 \iff n - 2\ln(1+x) \geq 0 \iff n \geq 2\ln(1+x)$.

2)b)$g_n'(x) \geq 0 \iff \dfrac{n}{2} \geq \ln(1+x) \iff e^{n/2} \geq 1+x \iff x \leq e^{n/2}-1$.

Donc $g_n$ est croissante sur $\left[0, e^{n/2}-1\right]$ et décroissante sur $\left[e^{n/2}-1, +\infty\right[$.

Cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^2} = 0 \ (c.c)$$

2)c)D'après la question 1)b), $g_n$ admet un maximum $M_n$ en $e^{n/2}-1$.

On a donc $M_n = g_n(e^{n/2}-1) = \dfrac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2} = \dfrac{(n/2)^n}{e^n} = \left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$.

Exercice 2

1)a)$Q(1)=0$ donc 1 est racine de $Q$.
La division euclidienne de $Q$ par $X-1$ donne : $Q=(X-1)(-X^2+4X-4)$.
$-X^2+4X-4$ admet 2 comme unique racine. Les racines de $Q$ sont donc 1 et 2.

b)On obtient $A^2=\begin{pmatrix} 17 & -36 & 20 \\ 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix} 49 & -116 & 68 \\ 17 & -36 & 20 \\ 5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

$Q(A)=-A^3+5A^2-8A+4I=0$. Donc $Q$ est un polynôme annulateur de $A$.

c)On a donc $sp(A)\subset\{\text{racines de } Q\}=\{1,2\}$.
On trouve $E_1(A)=\text{Vect}(V_1)$ et $E_2(A)=\text{Vect}(V_2)$ avec $V_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont non nuls donc 1 et 2 sont valeurs propres de $A$.

$(V_1)$ est une famille génératrice de $E_1(A)$ et libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_1(A)$. De même, $(V_2)$ est une base de $E_2(A)$.

$dimE_1(A)+dimE_2(A)=1+1=2\neq 3$. Donc $A$ n'est pas diagonalisable.

2)Soient $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(4,2,1)$ et $v_3=(4,1,0)$.

a)Le vecteur colonne de $f(v_1)$ dans $\mathscr{B}$ est $AV_1$. Or, $AV_1=V_1$ (faire le calcul).
Donc $f(v_1)=v_1$. De même, $f(v_2)=2v_2$.

b)$AV_3=\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $f(v_3)=(12,4,1)$.

$f(v_3)=av_2+bv_3 \iff (12,4,1)=(4a+4b,2a+b,a)\iff a=1$ et $b=2$.
Donc $f(v_3)=v_2+2v_3$.

c)Pour tous réels $a$,$b$ et $c$, on a :

$$av_1+bv_2+cv_3=0\iff a(1,1,1)+b(4,2,1)+c(4,1,0)=(0,0,0)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcll} a+4b+4c & = & 0 & L_1 \\ a+2b+c & = & 0 & L_2 \\ a+b & = & 0 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcll} a+4b+4c & = & 0 & L_1 \\ 2b+3c & = & 0 & L_2\leftarrow L_1-L_2 \\ 3b+4c & = & 0 & L_3\leftarrow L_1-L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcll} a+4b+4c & = & 0 & L_1 \\ 2b+3c & = & 0 & L_2 \\ c & = & 0 & L_3\leftarrow 3L_2-2L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcll} a & = & 0 & L_1 \\ b & = & 0 & L_2 \\ c & = & 0 & L_3\leftarrow 3L_2-2L_3 \end{array}\right.$$

Donc $\mathscr{C}$ est libre. C'est une famille libre de $\mathbf{R}^3$ dont le cardinal vaut 3 et coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$. Donc $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

d)$f(v_1)=v_1$, $f(v_2)=2v_2$ et $f(v_3)=v_2+2v_3$ donnent : $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

e)Récurrence classique. Pour l'hérédité, partir de l'égalité $T^{n+1}=T^nT$ et effectuer le calcul de produit matriciel en utilisant l'hypothèse de récurrence.