
Exercice 1 (edhec 2023)

1) Pour tous $(i, j) \in \llbracket 0, 4 \rrbracket^2$, le coefficient a_{ij} de A correspond au nombre d'arêtes entre le sommet $\boxed{i}$ et le sommet $\boxed{j}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

✓ On prend bien garde de numéroté les lignes et les colonnes de A à partir de l'indice zéro. On vérifie que A est symétrique.

2)a) Les chaînes de longueur 3 reliant les sommets $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ sont :

$\boxed{2}-\boxed{1}-\boxed{2}-\boxed{3}$, $\boxed{2}-\boxed{1}-\boxed{0}-\boxed{3}$, $\boxed{2}-\boxed{3}-\boxed{0}-\boxed{3}$, $\boxed{2}-\boxed{3}-\boxed{2}-\boxed{3}$ et $\boxed{2}-\boxed{3}-\boxed{4}-\boxed{3}$.

Il y en a 5.

b) La fonction f ci-dessous prend comme paramètres une matrice M et un entier k , et renvoie M^k .

La matrice B est donc égale à A^3 .

n correspond au coefficient $(2,3)$ de la matrice A^3 donc au nombre de chaînes de longueur 3 reliant les sommets $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$.

```
def f(M,k):  
    N=al.matrix_power(M,k)  
    return N  
B=f(A,3)  
n=B[2,3]  
print(n)
```

3)a) Le degré du sommet $\boxed{i}$ est égal au nombre d'arêtes reliées à ce sommet.

On peut compter ces arêtes « à la main » ou constater que c'est la somme des coefficients de la i -ème ligne de A .

Les degrés respectifs de $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ et $\boxed{4}$ sont 2, 2, 2, 3 et 1.

$$\text{Donc } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } L = D - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) L est symétrique donc diagonalisable.

4)a) $X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R})$ donc ${}^tX \in \mathcal{M}_{1,5}(\mathbf{R})$.

De plus, $LX \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R})$.

Par produit, ${}^tX L X \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{R})$, c'est donc un réel.

$$\text{b) } {}^tX = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix} \text{ et } LX = \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix}.$$

Par produit, on a :

$$\begin{aligned} {}^tX LX &= a(2a - b - d) + b(-a + 2b - c) + c(-b + 2c - d) + d(-a - c + 3d - e) + e(-d + e) \\ &= 2a^2 - ab - ad - ab + 2b^2 - bc - bc + 2c^2 - cd - ad - cd + 3d^2 - de - de + e^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 + e^2 - 2ab - 2ad - 2bc - 2cd - 2de. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} &(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 + (e - d)^2 \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2cd + d^2) + (d^2 - 2ad + a^2) + (e^2 - 2de + d^2) \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 + e^2 - 2ab - 2ad - 2bc - 2cd - 2de. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } {}^tX LX = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 + (e - d)^2.$$

c) • X est un vecteur propre de L associé à λ donc $LX = \lambda X$, ce qui donne :

$$LX = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \\ \lambda e \end{pmatrix}.$$

Puis, ${}^tX = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix}$, ce qui donne par produit :

$${}^tX LX = \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2).$$

• D'après la question 4)b), ${}^tX LX$ est une somme de carrés donc ${}^tX LX \geq 0$.

On a donc $\lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq 0$.

Comme X est un vecteur propre, l'une au moins de ses composantes est non nulle.

Donc $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 > 0$, ce qui mène à $\lambda \geq 0$.

Ainsi, les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

$$\text{d) Par produit, on trouve } LU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

U est non nul et tel que $LU = 0$. Donc U est un vecteur propre de L associé à la valeur propre 0.

Comme les valeurs propres de U sont positives ou nulles et que 0 est valeur propre de U , c'est donc que 0 est la plus petite des valeurs propres de U .

Ainsi, $\lambda_1 = 0$.

5)a) Cette question revient à chercher le sous-espace propre de L associé à 0.

$$LX = 0 \iff \begin{cases} 2a - b - d &= 0 \\ -a + 2b - c &= 0 \\ -b + 2c - d &= 0 \\ -a - c + 3d - e &= 0 \\ -d + e &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b &= e & L_1 \\ -a + 2b - c &= 0 & L_2 \\ -b + 2c &= e & L_3 \\ -a - c &= -2e & L_4 \\ d &= e & L_5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b &= e & L_1 \\ -a + 2b - c &= 0 & L_2 \\ -b + 2c &= e & L_3 \\ 2b &= 2e & L_4 \leftarrow L_2 - L_4 \\ d &= e & L_5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a &= e \\ c &= e \\ b &= e \\ d &= e \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists e \in \mathbf{R} \mid X = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \\ e \\ e \end{pmatrix}. \\
&\Leftrightarrow \exists e \in \mathbf{R} \mid X = e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
&\Leftrightarrow X \in \text{Vect}(U).
\end{aligned}$$

b) La question précédente montre que $E_0(L) = \text{Vect}(U)$.

(U) est donc une famille génératrice de $E_0(L)$, elle est constituée d'un seul vecteur non nul, elle est donc libre.

Donc (U) est une base de $E_0(L)$ et $\dim E_0(L) = 1$.

Comme L est diagonalisable, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 5, d'après le théorème de réduction.

Du fait que la dimension de $E_0(L)$ vaut 1, il y a donc obligatoirement d'autres valeurs propres que 0.

Etant positives ou nulles et non nulles, celles-ci sont donc strictement positives.

Remarque :

Je ne comprends pas la formulation de la question.

En effet, rien n'empêche que L ait par exemple 4 valeurs propres distinctes ordonnées ainsi : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5$.

Exercice 2 (edhec 2023)

1) On peut prendre par exemple $f : x \mapsto \frac{1}{2}x$.

En effet, on a alors $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right| = \frac{1}{2}|x - y| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.

En prenant $K = \frac{1}{2}$, la propriété (*) est alors vérifiée.

2) Soit x_0 un réel fixé. En appliquant (*) avec $y = x_0$, on obtient :

$\forall x \in \mathbf{R}$, $|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|$ et même : $0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} K|x - x_0| = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, ce qui signifie que

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Donc f est continue en x_0 .

f étant continue en tout $x_0 \in \mathbf{R}$, on peut donc conclure que f est continue sur $\mathbf{R}$.

3) Supposons que l'équation $f(x) = x$ admette au moins deux solutions.

Soient a et b , deux d'entre elles (avec $a \neq b$). On a alors $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

En appliquant (*) avec $x \rightarrow a$ et $y \rightarrow b$, on obtient :

$|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$, c'est-à-dire : $|b - a| \leq K|b - a|$.

En divisant membre à membre par $|b - a| > 0$, on obtient : $1 \leq K$, ce qui est absurde.

Ainsi, l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

4) a) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n|u_1 - u_0|$ ».

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit : « $|u_1 - u_0| \leq |u_1 - u_0|$ », ce qui est vrai.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a : $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n|u_1 - u_0|$, puis en multipliant membre à membre par $K > 0$:

$$K|u_{n+1} - u_n| \leq K^{n+1}|u_1 - u_0| \quad (1)$$

Par ailleurs, (*) donne : $|f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq K|u_{n+1} - u_n|$, c'est-à-dire

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K|u_{n+1} - u_n| \quad (2)$$

En recollant (1) et (2), on a : $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K^{n+1}|u_1 - u_0|$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n|u_1 - u_0|$.

b) • La série $\sum_{n \geq 0} K^n$ converge comme série géométrique de paramètre $K \in]0, 1[$.

Donc la série $\sum_{n \geq 0} K^n|u_1 - u_0|$ converge.

Comme $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq K^n|u_1 - u_0|$, on peut appliquer le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, et conclure que la série $\sum_{n \geq 0} |u_{n+1} - u_n|$ converge.

La série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ est alors absolument convergente donc convergente.

• Par télescopage, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0, \text{ puis } u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

Du fait de la convergence de la série, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$ existe et est finie.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ existe et est finie, ce qui établit la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et f est continue en a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(a)$.

On a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = a$.

En passant à la limite dans l'égalité $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, on déduit : $a = f(a)$.

Donc a est solution de l'équation $f(x) = x$, c'est alors l'unique solution de cette équation du fait de la question 3).

5)a) D'après la question 4)a), on sait que $\forall i \in \mathbf{N}, |u_{i+1} - u_i| \leq K^i |u_1 - u_0|$.

En sommant ces inégalités pour i allant de n à $n + p - 1$, on a :

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0|.$$

b) • Par télescopage, on a : $u_{n+p} - u_n = \sum_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i)$.

$$\text{Donc } |u_{n+p} - u_n| = \left| \sum_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i) \right|.$$

D'après l'inégalité triangulaire, $|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i|$ (1)

Or, la question 5)a) donne : $\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0|$ (2)

En recollant (1) et (2), on a :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0|.$$

• Il reste à calculer la somme du membre de droite.

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0| &= |u_1 - u_0| \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \\ &= |u_1 - u_0| \sum_{j=0}^{p-1} K^{j+n} \quad \text{en posant } j = i - n \\ &= |u_1 - u_0| K^n \sum_{j=0}^{p-1} K^j \\ &= K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} |u_1 - u_0|. \end{aligned}$$

c) $\lim_{p \rightarrow +\infty} K^p = 0$ car $K \in]0, 1[$.

$$\text{Donc } \lim_{p \rightarrow +\infty} K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} |u_1 - u_0| = \frac{K^n}{1 - K} |u_1 - u_0|.$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n+p} = a \text{ donc } \lim_{p \rightarrow +\infty} (u_{n+p} - u_n) = a - u_n.$$

Par continuité de $x \mapsto |x|$, on a ensuite : $\lim_{p \rightarrow +\infty} |u_{n+p} - u_n| = |a - u_n|$.

En passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité de la question 5)b), on a :

$$|a - u_n| \leq \frac{K^n}{1 - K} |u_1 - u_0|.$$

6)a) La fonction $t \mapsto 1 + e^t$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions de classe C^2 , et ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.

Par inverse, f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$.

$$\forall t \in \mathbf{R}, f'(t) = \frac{-e^t}{(1 + e^t)^2}.$$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}, f''(t) &= \frac{-e^t(1 + e^t)^2 + e^t \times 2e^t(1 + e^t)}{(1 + e^t)^4} \\ &= \frac{e^t(1 + e^t)(-(1 + e^t) + 2e^t)}{(1 + e^t)^4} \\ &= \frac{e^t(e^t - 1)}{(1 + e^t)^3}. \end{aligned}$$

b) • $\forall t \in \mathbf{R}, e^t > 0$ donc $f''(t) \geq 0 \iff e^t - 1 \geq 0 \iff e^t \geq 1 \iff t \geq 0$.

D'où le tableau de variations de f' :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(t)$	$-$	0	$+$
$f'(t)$	0	$-\frac{1}{4}$	0

• Justification des limites :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow -\infty} (1 + e^t)^2 = 1. \text{ Par quotient, } \lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) = 0.$$

Quand $t \rightarrow +\infty$, on a une forme indéterminée.

On peut remarquer que $1 + e^t \underset{+\infty}{\sim} e^t$, puis $(1 + e^t)^2 \underset{+\infty}{\sim} (e^t)^2$.

$$\text{Par quotient, } f'(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-e^t}{(e^t)^2} = \frac{-1}{e^t}.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^t} = 0 \text{ donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = 0.$$

• Le tableau de variations donne $\forall t \in \mathbf{R}, -\frac{1}{4} \leq f'(t) \leq 0$.

$$\text{Donc } \forall t \in \mathbf{R}, |f'(t)| \leq \frac{1}{4}.$$

c) f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall t \in \mathbf{R}, |f'(t)| \leq \frac{1}{4}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout couple (x, y) de réels, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|.$$

Donc f est $\frac{1}{4}$ -contractante.

d) Comme f est contractante, la question 4)b) s'applique et assure la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

e) programme :

```
import numpy as np
def suite(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=1/(1+np.exp(u))
    return u
```

f) u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près ssi $|u_n - a| \leq 10^{-3}$.

Comme f est contractante, la question 5)c) s'applique et donne :

$$|a - u_n| \leq \frac{K^n}{1 - K} |u_1 - u_0|, \quad \text{avec } K = \frac{1}{4}, u_0 = 0 \text{ et } u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ce qui donne : } |a - u_n| \leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Pour que u_n soit une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près, il suffit donc de prendre n tel que $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 10^{-3}$, ce qui est équivalent à :

$$\frac{2}{3 \times 4^n} \leq \frac{1}{1000}, \text{ puis à } 4^n \geq \frac{2000}{3}.$$

g) On complète la fonction Python précédente par :

```
n=0
while 4**n<2000/3:
    n=n+1
print(suite(n))
```

✓ On trouve $a \approx 0.401$

Exercice 3 (edhec 2023)

1)a) Si $a = b$, alors $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
Donc $\text{sp}(A) = \{a\}$. Ainsi, A ne possède qu'une seule valeur propre.

b) Supposons A diagonalisable. Alors, il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

D porte sur sa diagonale les valeurs propres de A donc $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI$.

On a alors : $A = P(aI)P^{-1} = aPIP^{-1} = aPP^{-1} = aI$, ce qui est absurde.

Donc A n'est pas diagonalisable.

2)a) A est triangulaire donc $\text{sp}(A) = \{a, b\}$.

b) • $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De plus, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nul.

Donc c'est un vecteur propre de A associé à la valeur propre a .

• $A \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b(b-a) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$.

De plus, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$ n'est pas nul.

Donc c'est un vecteur propre de A associé à la valeur propre b .

c) • Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{B}$ est libre.

C'est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ dont le cardinal vaut 2 et coïncide avec la dimension de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.

$\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.

• Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1e_1 + 0e_2$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = 1e_1 + (b-a)e_2$.

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$.

d) • $AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & (b-a)b \end{pmatrix}$.

Cherchons une matrice D diagonale donc de la forme $D = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ telle que

$AP = PD$.

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & (b-a)d \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } AP = PD \iff \begin{cases} c & = a \\ d & = b \\ (b-a)d & = (b-a)b \end{cases}$$

La troisième équation est équivalente à $d = b$ car $b - a \neq 0$.

Finalement, $AP = PD \iff c = a$ et $d = b$.

On prend donc $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

• P est inversible car c'est la matrice de passage d'une base à une autre.

De l'égalité $AP = PD$, on tire : $APP^{-1} = PDP^{-1}$, soit $A = PDP^{-1}$.

A est semblable à une matrice diagonale, elle est donc diagonalisable.

3)a) Comme Y suit une loi géométrique, on a $Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

La formule des probabilités totales pour le système complet $(Y = n)_{n \geq 1}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((X = Y) \cap (Y = n)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((X = n) \cap (Y = n)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \forall n \in \mathbf{N}^*, P(X = n) = P(Y = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Compte tenu de la question précédente, on déduit :

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 \\ &= \frac{1}{1 - 1/4} - 1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4)a) D'après les questions précédentes, $A(X, Y)$ n'est pas diagonalisable ssi $X = Y$.

La probabilité que $A(X, Y)$ n'est pas diagonalisable vaut donc $p = P(X = Y) = \frac{1}{3}$.

b)programme :

```
import numpy.random as rd
m=int(input("entrer m"))
c=0
for k in range(m):
    X=rd.geometric(1/2)
    Y=rd.geometric(1/2)
    if X==Y:
        c=c+1
i=1-c/m
print(i)
```

A la fin de la boucle, c/m représente la fréquence de réalisation de l'événement $(X = Y)$ à l'issue de m expériences aléatoires.

$i = 1 - c/m$ représente donc la *fréquence de réalisation* de l'événement $(X \neq Y)$ à l'issue de m expériences aléatoires.

Lorsque le nombre m d'expériences aléatoires est grand, on sait en vertu de la loi faible des grands nombres, que la fréquence de réalisation d'un événement est proche de sa probabilité théorique.

Aussi, $i \approx P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Problème (edhec 2023)**Partie I**

1) • f est bien définie sur $\mathbf{R}$.

• f est continue sur $] -\infty, 1[$ (fonction nulle) et sur $[1, +\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues. Donc f est continue sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 1.

• D'une part, $\forall x \geq 1, f(x) \geq 0$ car $c > 0$ et $x^{1+c} > 0$;

d'autre part, $\forall x < 1, f(x) = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$.

• $\int_{-\infty}^1 f(x)dx$ converge et vaut 0 car f est nulle sur $] -\infty, 1[$.

Pour tout $A > 1$, on a :

$$\int_1^A f(x)dx = \int_1^A \frac{c}{x^{1+c}} dx = \int_1^A cx^{-c-1} dx = \left[c \times \frac{x^{-c}}{-c} \right]_1^A = 1 - A^{-c} = 1 - \frac{1}{A^c}.$$

Comme $c > 0$, on a : $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^c = +\infty$, puis $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A f(x)dx = 1$.

Donc $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Par Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge.

$$\text{De plus, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1.$$

Ainsi, f est bien une densité.

$$2) \forall x \in \mathbf{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Distinguons deux cas :

• premier cas : $x < 1$

$$\text{On a alors } \forall t \in] -\infty, x], f(t) = 0 \text{ donc } F(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0.$$

• second cas : $x \geq 1$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^1 0dt + \int_1^x \frac{c}{t^{1+c}} dt \\ &= 0 + \left(1 - \frac{1}{x^c} \right) \quad \text{voir calcul fait en 1)} \\ &= 1 - \frac{1}{x^c}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3) Soit $t > 1$.

$$a) P_{(X>t)}(X \leq tx) = \frac{P((X > t) \cap (X \leq tx))}{P(X > t)} = \frac{P(t < X \leq tx)}{1 - P(X \leq t)}.$$

- premier cas : $x \geq 1$

On a alors $t \leq tx$, ce qui permet d'exprimer le numérateur à l'aide de F .

$$\begin{aligned} \text{On obtient : } P_{(X>t)}(X \leq tx) &= \frac{F(tx) - F(t)}{1 - F(t)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{(tx)^c}\right) - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{t^c}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{t^c} - \frac{1}{(tx)^c}}{\frac{1}{t^c}} \\ &= 1 - \frac{1}{x^c}. \end{aligned}$$

- second cas : $x < 1$

On a alors $tx < t$. L'événement $(t < X \leq tx)$ est impossible.

Donc $P_{(X>t)}(X \leq tx) = 0$.

$$\text{Ainsi, } P_{(X>t)}(X \leq tx) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \forall x \in \mathbf{R}, P_{(X>t)}\left(\frac{X}{t} \leq x\right) &= P_{(X>t)}(X \leq tx) \quad \text{car } t > 0 \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^c} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases} \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Donc la loi de $\frac{X}{t}$ conditionnellement à l'événement $(X > t)$ est la loi de X .

Partie II

$$4) G(1) = P(Y \leq 1) = \int_{-\infty}^1 g(x) dx = 0 \quad \text{car } g \text{ est nulle sur }]-\infty, 1[.$$

5)a) Pour tout $x \geq 1$ et tout $t > 1$, on a :

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t} \leq x\right) \quad \text{par hypothèse} \\ &= P_{(Y>t)}(Y \leq tx) \quad \text{car } t > 0 \\ &= \frac{P((Y > t) \cap (Y \leq tx))}{P(Y > t)} \\ &= \frac{P(t < Y \leq tx)}{1 - P(Y \leq t)} \\ &= \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}. \end{aligned}$$

b) Y a pour densité g et pour fonction de répartition G .

Donc G est de classe C^1 aux mêmes points où g est continue.

Par hypothèse, g est continue sur $]1, +\infty[$ donc G est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

Soit $t > 1$.

Les fonctions $x \mapsto G(t)$ et $x \mapsto 1 - G(t)$ sont constantes.

En appliquant la formule de dérivation composée à $h : x \mapsto G(tx)$, on a :

$$\forall x > 1, h'(x) = \frac{d}{dx}(tx) \times G'(tx) = tG'(tx).$$

$$\text{D'où, } \forall x > 1, \forall t > 1, G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}.$$

c) G est dérivable sur $]1, +\infty[$. D'après le cours, sa dérivée sur $]1, +\infty[$ vaut g .

La question précédente donne alors :

$$\forall x > 1, \forall t > 1, g(x) = \frac{tg(tx)}{1 - G(t)} \quad (*)$$

Dans l'égalité ci-dessous, faisons tendre x vers 1^+ .

Par hypothèse, g est continue sur $[1, +\infty[$. Elle est donc en particulier continue à droite en 1.

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$ et comme par hypothèse, $g(1) = c$, on a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = c$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^+} tx = t$ et g est continue en t car $t > 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(tx) = g(t)$.

En passant à la limite dans $(*)$ quand $x \rightarrow 1^+$, on a finalement :

$$\forall t > 1, c = \frac{tg(t)}{1 - G(t)}, \text{ puis } 1 - G(t) = \frac{t}{c}g(t) \text{ et } G(t) + \frac{t}{c}g(t) = 1.$$

Comme $\forall t > 1, g(t) = G'(t)$, on a bien :

$$\forall t > 1, G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1.$$

6)a) Commençons par remarquer que $z : t \mapsto t^c y(t)$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

De plus, $\forall t > 1, z'(t) = ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t)$.

y est solution de (E_1)

$$\iff \forall t > 1, y(t) + \frac{t}{c}y'(t) = 0$$

$$\iff \forall t > 1, ct^{c-1}y(t) + ct^{c-1}\frac{t}{c}y'(t) = 0 \quad \text{car } ct^{c-1} \neq 0$$

$$\iff \forall t > 1, ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t) = 0$$

$$\iff \forall t > 1, z'(t) = 0$$

$$\iff z \text{ est constante sur }]1, +\infty[.$$

b) De la question précédente, on déduit :

y est solution de (E_1)

$$\iff \exists K \in \mathbf{R}, \forall t > 1, z(t) = K$$

$$\iff \exists K \in \mathbf{R}, \forall t > 1, t^c y(t) = K$$

$$\iff \exists K \in \mathbf{R}, \forall t > 1, y(t) = \frac{K}{t^c}.$$

Donc les solutions de (E_1) sont les fonctions $y : t \mapsto \frac{K}{t^c}$, où K est un réel quelconque.

c) La fonction $u : t \mapsto 1$ est solution de (E_2) .

En effet, $\forall t \in \mathbf{R}, u(t) + \frac{t}{c}u'(t) = 1 + \frac{t}{c} \times 0 = 1$.

d) h solution de (E_2)

$$\iff \forall t > 1, h(t) + \frac{t}{c}h'(t) = 1$$

$$\iff \forall t > 1, (h(t) - 1) + \frac{t}{c}(h'(t) - 0) = 0$$

$$\iff \forall t > 1, (h(t) - u(t)) + \frac{t}{c}(h'(t) - u'(t)) = 0$$

$$\iff \forall t > 1, (h - u)(t) + \frac{t}{c}(h - u)'(t) = 0$$

$$\iff h - u \text{ est solution de } (E_1).$$

e) Des questions 6)b) et 6)d), on déduit :

h solution de (E_2)

$$\iff \exists K \in \mathbf{R}, \forall t > 1, (h - u)(t) = \frac{K}{t^c}$$

$$\iff \exists K \in \mathbf{R}, \forall t > 1, h(t) = u(t) + \frac{K}{t^c}$$

$$\iff \exists K \in \mathbf{R}, \forall t > 1, h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}.$$

7)a) La question 5)c) prouve que G est solution de (E_2) .

D'après 6)e), il existe un réel K tel que $\forall t > 1, G(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$.

En faisant tendre t vers 1^+ , et compte tenu de la continuité de G sur $\mathbf{R}$ donc en 1, on a :

$$G(1) = 1 + K, \text{ d'où } K = G(1) - 1 = 0 - 1 = -1.$$

$$\text{Ainsi, } \forall t > 1, G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.$$

b) Pour $t = 1$, l'égalité précédente s'écrit : $G(1) = 1 - \frac{1}{1^c} = 0$, ce qui est vrai.

Puis, comme g est nulle sur $] -\infty, 1[$, on a $G(t) = \int_{-\infty}^t g(u)du = \int_{-\infty}^t 0du = 0$.

$$\text{Finalement, } G(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^c} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases} = F(t).$$

Y suit donc la même loi que X , c'est-à-dire la loi de Paréto de paramètre c .

Partie III

$$8)a) \forall x \in \mathbf{R}, H(x) = P(Z \leq x)$$

$$= P(\ln X \leq x)$$

$$= P(X \leq e^x) \quad \text{par croissance de } x \mapsto e^x$$

$$= F(e^x).$$

b) Des questions 2) et 8)a), on déduit :

$$\forall x \in \mathbf{R}, H(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(e^x)^c} & \text{si } e^x \geq 1 \\ 0 & \text{si } e^x < 1 \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire : } H(x) = \begin{cases} 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$.

c) Comme $X = e^Z$, on fait :

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
def simulX(c):
    Z=rd.exponential(c)
    X=np.exp(Z)
    return X
```