Corrigé révisions - séance 1

<u>Exercice</u>
Rappelons que la fonction de répartition F_X de X est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1)a)$P(Y < 0) = P(\lfloor X \rfloor < 0) = P(X < 0) = F_X(0) = 0.$
Y prend donc ses valeurs dans $\mathbf{R}_+$. Ses valeurs sont entières par construction.
Donc $Y(\Omega) = \mathbf{N}$.

b)$$\begin{aligned} P(Y = k-1) &= P(k-1 \leq X < k) \\ &= F_X(k) - F_X(k-1) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda k}\right) - \left(1 - e^{-\lambda(k-1)}\right) \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} \\ &= e^{-\lambda(k-1)}\left(1 - e^{-\lambda}\right). \end{aligned}$$

c)$Y(\Omega) = \mathbf{N}$ donc $(Y+1)(\Omega) = \mathbf{N}^*$.
De plus, pour tout $\forall k \in \mathbf{N}*$, on a :
$$\begin{aligned} P(Y + 1 = k) &= P(Y = k-1) \\ &= e^{-\lambda(k-1)}\left(1 - e^{-\lambda}\right) \\ &= \left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}\left(1 - e^{-\lambda}\right). \end{aligned}$$
Donc $Y + 1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$.

d)Le cours donne : $E(Y+1) = \dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}}$ et $V(Y+1) = \dfrac{e^{-\lambda}}{\left(1 - e^{-\lambda}\right)^2}$.

Par linéarité, $E(Y+1) = E(Y) + 1$.

Donc $E(Y) = E(Y+1) - 1 = \dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1 = \dfrac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$.

Enfin [1], $V(Y+1) = V(Y)$ donc $V(Y) = \dfrac{e^{-\lambda}}{\left(1 - e^{-\lambda}\right)^2}$.

2)a)$\forall x \in \mathbf{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc [2] $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$.
Ainsi, on a : $0 \leq X - \lfloor X \rfloor < 1$, c'est-à-dire $0 \leq Z < 1$. Donc $Z(\Omega) = [0, 1[$.

Soit x un réel de $[0, 1[$.
- La formule des probabilités totales pour le système complet $(Y = k)_{k \in \mathbf{N}}$ s'écrit :

$$P(Z \leq x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big((Z \leq x) \cap (Y = k)\big).$$

1. on rappelle que $V(aY + b) = a^2 V(Y)$
2. pour tout x réel, le nombre $x - \lfloor x \rfloor$ s'appelle la partie fractionnaire de x (cf. essec II 2014)

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}P(Z \leq x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P\big((X - Y \leq x) \cap (Y = k)\big)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P\big((X - k \leq x) \cap (Y = k)\big)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P\big((X \leq x + k) \cap (k \leq X < k+1)\big)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P\big((X \leq x + k) \cap (k \leq X) \cap (X < k+1)\big)\end{aligned}$$

Comme $x \in [0,1[$, on a : $x + k < k + 1$.
Donc l'événement $(X \leq x + k)$ est inclus dans l'événement $(X < k+1)$, ce qui entraîne que $\big((X \leq x + k) \cap (X < k+1)\big) = (X \leq x + k)$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } P(Z \leq x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P\big((X \leq x + k) \cap (k \leq X)\big)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P\big(k \leq X \leq x + k\big).\end{aligned}$$

• On déduit :

$$\begin{aligned}P(Z \leq x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \big(F_X(x+k) - F_X(k)\big)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\big(1 - e^{-\lambda(x+k)}\big) - \big(1 - e^{-\lambda k}\big)\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(x+k)}\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k}\Big(1 - e^{-\lambda x}\Big)\\
&= \Big(1 - e^{-\lambda x}\Big)\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(e^{-\lambda}\Big)^k\\
&= \Big(1 - e^{-\lambda x}\Big) \times \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in [0,1[,\ P(Z \leq x) = \dfrac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$.

c)$\forall x \in \mathbf{R},\ F_Z(x) = P(Z \leq x)$.

• $x < 0$
Z prend ses valeurs dans $[0,1[$, l'événement $(Z \leq x)$ est impossible. $F_Z(x) = 0$.

• $x \in [0,1[$
La question 2)b) donne : $F_Z(x) = \dfrac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$.

• $x \geq 1$
Z prend ses valeurs dans $[0,1[$, l'événement $(Z \leq x)$ est certain. $F_Z(x) = 1$.

On conclut que $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

d)• F_Z est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[1, +\infty[$ (fonction constante). Elle est continue aussi sur $[0,1[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec la différence, la composée et le quotient de fonctions continues.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Z(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} F_Z(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} = 0$,

$F_Z(0) = 0$.

Donc F_Z est continue en 0.

De même, $\lim\limits_{x\to 1^+} F_Z(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1$,

$\lim\limits_{x\to 1^-} F_Z(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} = 1$,

$F_Z(1) = 1$.

Donc F_Z est continue en 1.

Ainsi, F_Z est continue sur $\mathbf{R}$.

• F_Z est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $[1, +\infty[$ (fonction constante). Elle est aussi de classe C^1 sur $[0,1[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec la différence, la composée et le quotient de fonctions C^1.
Donc F_Z est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0 et en 1.

• On conclut que Z est une variable aléatoire à densité.
Une densité f_Z de Z s'obtient en dérivant F_Z aux points où elle est dérivable, c'est-à-dire sur $\mathbf{R} \setminus \{0,1\}$.

Donc $f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

En 0 et en 1, on peut attribuer [3] à f_Z une valeur arbitraire positive ou nulle, par exemple $\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}$ en 0 et $\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$ en 1.

Finalement, $f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

3. ce choix permet d'avoir f continue sur $[0,1]$, plus commode pour la question 2)e)

e)**première façon**

Z admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |xf_Z(x)|\,dx$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 xf_Z(x)dx$ converge.

Cette convergence est acquise puisque $x \mapsto xf_Z(x)$ est continue sur $[0,1]$.

Donc Z admet une espérance donnée par :

$$E(Z) = \int_0^1 x\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}dx = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}\int_0^1 x\lambda e^{-\lambda x}dx \quad (*)$$

On fait une intégration par parties sur $\displaystyle\int_0^1 xe^{-\lambda x}dx$ en posant :

$u(x) = x \qquad v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$u'(x) = 1 \qquad v(x) = -e^{-\lambda x}$

u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$. L'IPP est licite et donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-\lambda x}dx &= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-\lambda x}dx\\ &= -e^{-\lambda} - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^1\\ &= -e^{-\lambda} - \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda}-1\right)\\ &= \frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right) - e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

En reportant dans $(*)$, on obtient : $E(Z) = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$.

deuxième façon

De $Z = X - Y$, on tire : $E(Z) = E(X) - E(Y)$ par linéarité.

D'où $E(Z) = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$.