DS1 ECG2 mathématiques appliquées
mercredi 21/09/2022

Exercice 1 :

Dans l'ensemble $M_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, on considère le sous-ensemble F des matrices M(a,b) définies par :

$$M(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.\quad \text{Ainsi } F = \{M(a,b) \text{ où a et b décrivent } \mathbb{R}\}$$

$$\text{On note } A = M(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = M(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I. Structure de F

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et que (A,B) est une famille génératrice de F.

b) Donner une base de F ainsi que sa dimension.

II. Etude de A et B

a) Calculer A^2. En déduire que A est une matrice inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.

b) Calculer B^2. B est-elle inversible ?

c) Vérifier que $BA = AB = B$

d) Montrer par récurrence que pour tout $k \geq 0$: $BA^k = A^k B = B$

III. Calcul de $[M(a,b)]^n$

En appliquant la formule du binôme, montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$[M(a,b)]^n = a^n A^n + na^{n-1}bB$

IV. Etude de l'inversibilité de M(a,b)

a) En appliquant la méthode de Gauss, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que M(a,b) soit inversible puis calculer $[M(a,b)]^{-1}$.

b) L'égalité du III est-elle encore valable si n= -1 ?

Exercice 2 : (em lyon remanié)
Soit A une matrice fixée de $M_3(\mathbb{R})$.
Pour tout entier $j \geq 1$, on considère l'ensemble $E_j(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \,/\, A^j M = A^{j-1} M\}$.

Partie A :
Dans cette partie, on s'interesse au cas particulier où $j = 1$ ou $j = 2$.
On considère donc les ensembles suivants :

$E_1(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \,/\, AM = M\}$ et $E_2(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \,/\, A^2M = AM\}$

1)Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_3(\mathbb{R})$
[on pourra établir qu'ils sont stables par combinaison linéaire].

2)a)Etablir que $E_1(A) \subseteq E_2(A)$

2)b)Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$

2)c)Etablir que si A-I est inversible, alors $E_1(A) = \{O\}$

3)On prend $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

A l'aide des questions 2)b) et 2)c) déterminer $E_1(A)$ et $E_2(A)$

4)On prend $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

a)Déterminer des matrices U_1, U_2, U_3 de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $E_1(A) = \text{Vect}(U_1, U_2, U_3)$

b)En déduire une base de $E_1(A)$ et sa dimension.

Partie B :
On revient au cas général où $j \geq 1$ est un entier quelconque.

1)Montrer que pour tout entier $j \geq 1$: $E_j(A) \subseteq E_{j+1}(A)$.

2)Montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que
$E_k(A) = E_{k+1}(A)$ [on pourra utiliser la question précédente].

3)En déduire par récurrence sur j que pour tout entier $j \geq k$: $E_j(A) = E_{j+1}(A)$.

Exercice 3 :

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$\vec{v_1} = (2,3,-1)$ $\quad\vec{v_2} = (1,-1,-2)$ $\quad\vec{v_3} = (0,0,1)$ $\quad\vec{w_1} = (3,7,0)$ $\quad\vec{w_2} = (5,0,-7)$

$\vec{e_1} = (1,0,0)$ $\quad\vec{e_2} = (0,1,0)$ $\quad\vec{e_3} = (0,0,1)$.

On pose F = Vect($\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$) et G = Vect($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$)

1)Justifier que F et G sont de dimension 2 .

2)Montrer que $\vec{w_1}$ est combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

Montrer de même que $\vec{w_2}$ est combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

3)En déduire que F $\subseteq$ G puis que F = G.

4)Montrer que $\mathcal{C}$ = ($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, puis une base de $\mathbb{R}^3$

5)a)Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ = ($\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$) à la base $\mathcal{C}$.

b)Justifier que P est inversible et calculer son inverse P^{-1} .

c)Préciser les coordonnées de $\vec{w_1}$ dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 4 :

On considère l'application f définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ln x & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1)Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

2)Prouver que f est continue sur $\mathbf{R}_+$.

3)Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbf{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

4)Montrer que f est dérivable en 0. Donner l'allure de $\mathscr{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse 0.

5)Dresser le tableau de variations de f.

6)On donne $\ln 2 \approx 0.7$. Montrer l'existence d'un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$ et justifier que $\sqrt{2} < \alpha < 2$.