

MATHÉMATIQUES I, session 2014

Option Économique

École conceptrice : EMLYON

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

L'exercice 1 (analyse) propose l'étude d'une fonction, suivie d'une recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles et d'une étude de suite et série, demandant l'écriture d'un programme informatique en Turbo-Pascal.

Partie I

La partie I consiste en l'étude complète d'une fonction φ d'une variable réelle, jusqu'au tracé de l'allure de sa courbe représentative.

1. Il y a trop souvent confusion entre φ et $\varphi(x)$, entre fonction et nombre réel.

Des candidat(e)s, ayant obtenu $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ faux, déduisent bizarrement un $\varphi'''(x)$ exact, donné par l'énoncé. Une telle attitude a bien sûr été sanctionnée par les correcteurs.

2. Les rédactions manquent souvent de concision.

Il y a quelquefois confusion entre les intervalles $]0; +\infty[$ et $[1; +\infty[$.

3. Pour cette question, les justifications ne sont pas claires et nettes, et l'intervention d'une croissance comparée est souvent imprécise.

Il y a quelquefois confusion entre $x \rightarrow 0$ et $\frac{1}{x} \rightarrow 0$.

4. Ici aussi, les justifications ne sont pas claires et nettes.

Certain(e)s candidat(e)s n'ont pas remarqué que, pour $x > 0$, on a $\varphi(x) = x \frac{\varphi(x)}{x}$.

5. Les solutions à cette question sont en général convenables, par l'étude de la fonction $x \mapsto \varphi(x) - ex$ ou par l'intervention d'intégrales.

Mais certaines copies sont ici très confuses.

6. La question est, dans l'ensemble, mal traitée.

Des copies confondent les conditions $f''(x) = 0$ et $f(x) = x$.

Les candidat(e)s, pour la plupart, confondent point d'inflexion et point d'annulation de f'' , oubliant d'étudier le signe de f'' au voisinage du point considéré.

Beaucoup de copies ne répondent pas à la demande d'une équation pour la tangente au point d'inflexion, ou donnent une équation fautive, souvent en remplaçant $e(x-1)$ par $ex-1$, au lieu de $ex-e$.

7. Quelques courbes bizarres.

Contrairement à ce que demande l'énoncé, beaucoup de candidat(e)s ne font pas apparaître sur le schéma la tangente au point d'inflexion.

Partie II

La partie II propose la recherche d'un éventuel extremum local pour une fonction réelle de deux variables réelles, en liaison avec la partie I.

8. Le schéma demandé est très souvent absent.

Quand il est présent, le schéma est majoritairement faux, avec souvent un demi-plan de droite au lieu d'un demi-plan du dessus, ce qui revient à une confusion entre x et y .

9. Les réponses pour les dérivées partielles premières et secondes sont en général correctes.

Cependant, quelques candidat(e)s oublient de calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, cet oubli étant alors souvent réparé à la question 12.

10. La définition d'un point critique est bien sue, mais la résolution du système de deux équations à deux inconnues n'aboutit que rarement.

Les implications logiques sont souvent considérées, à tort, comme des équivalences.

Beaucoup de candidat(e)s remplacent y par $e^{1/x}$ sans autre justification que d'aboutir au résultat demandé.

11. Le lien avec la question précédente et avec la partie I n'est pas toujours perçu.

12. Question abordée dans une minorité de copies, avec souvent des erreurs de calcul.

13. Quelques rares bonnes réponses, les autres essais montrant une incompréhension de la question posée, par rapport à la question précédente.

Partie III

La partie III propose l'étude d'une suite et celle d'une série, en liaison avec la partie I, et comporte une question d'informatique.

14. Les justifications et les raisonnements manquent de clarté.

15. Quelques copies contiennent une grossière erreur, par soustraction d'inégalités de même sens.

Trop de copies confondent l'existence d'une limite pour la fonction φ et l'existence d'une limite pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Trop de candidat(e)s croient, à tort, que, puisque la fonction φ est croissante, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi croissante.

16. Cette question d'informatique a été abordée dans un nombre significatif de copies, et souvent correctement traitée.

Cependant, des candidat(e)s confondent 10^3 et 10^{-3} .

17. Des candidat(e)s confondent suite et série.

Les correcteurs ont trop souvent rencontré la grossière erreur : puisque $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ la série

$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_n}$ converge, les candidat(e)s confondant une implication et sa réciproque.

L'exercice 2 (algèbre linéaire) propose l'étude d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de matrices carrées, puis l'étude de ses valeurs propres, de ses sous-espaces propres et de ses puissances.

1. Dans des copies très faibles, il y a confusion entre les objets mathématiques étudiés, entre espace vectoriel et application linéaire.

Les correcteurs ont souvent rencontré l'écriture incorrecte « les vecteurs A, B, C sont libres » au lieu de l'écriture correcte « la famille (A, B, C) est libre », la liberté n'étant pas une propriété de chacun des vecteurs A, B, C séparément, mais une propriété de la famille (A, B, C) .

2. Il y a quelquefois confusion entre MN (produit de deux matrices de $\mathcal{E}$, objet de la question) et M^2 (carré d'une matrice de $\mathcal{E}$).

3. Dans la plupart des copies, le raisonnement proposé est faux, par confusion entre implication et réciproque.

Il y a souvent des erreurs dans le calcul de l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, pour $a \neq 0$ et $c \neq 0$, par utilisation d'une transformation illicite du genre $C_2 \leftarrow aC_2 - bC_1$, les candidat(e)s confondant probablement une méthode de calcul du rang avec une méthode de calcul de l'inverse.

4. Il y a souvent confusion entre $\mathcal{E}$ et $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Trop de candidat(e)s confondent $f^{-1}(M)$, $f(M^{-1})$, $(f(M))^{-1}$.

Des candidat(e)s confondent T et une matrice représentant f .

On croit, à tort, que toute matrice triangulaire est inversible.

Il y a souvent oubli de l'argument de dimension finie pour passer éventuellement de injectif à surjectif.

6. Quelques candidat(e)s croient, à tort, que T est symétrique.

Des candidat(e)s confondent matrice diagonalisable et matrice inversible.

Rappelons qu'il n'y a pas de lien logique entre diagonalisabilité et inversibilité, comme le montrent les quatre exemples suivant, à l'ordre 2 :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et est inversible,

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et n'est pas inversible,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable et est inversible,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable et n'est pas inversible.

7. Question souvent correctement résolue.

Cependant, quelques copies donnent pour F une matrice qui n'est pas du bon format.

8. Il y a très souvent confusion entre les sous-espaces propres de f (demandés et qui sont formés de matrices carrées d'ordre 2) et les sous-espaces propres de F (qui sont formés de colonnes à 4 éléments).

9. La base donnée est souvent fautive, avec un seul vecteur au lieu de deux.

10. Trop de calculs inutiles, peu de candidat(e)s ayant perçu le lien avec la question précédente. Les correcteurs ont vu des confusions entre $\emptyset$ et $\{0\}$.

11. Dans des copies très faibles, le simple calcul de H^2 est faux.

Beaucoup de candidat(e)s, dans le développement de la formule du binôme de Newton, ont confondu $(aH)^k$ et aH^k .

12. Question correctement résolue par les candidat(e)s qui l'ont abordée.

13. De rares copies donnent une réponse, souvent satisfaisante.

L'exercice 3 (probabilités) porte sur des tirages d'une boule dans une urne, avec remise, des calculs de probabilités et un passage à la limite.

Cet exercice n'est pas du tout abordé dans un nombre significatif de copies.

Partie I

La partie I porte sur le cas particulier $n = 3$.

1.a. Les correcteurs ont rencontré des écritures du type $N_3 \cap N_2 \cap N_1$ (où N_k est une variable aléatoire) qui n'ont pas de sens, ceci revenant à confondre une variable aléatoire et un événement.

Les événements doivent être clairement décrits.

Quelques candidat(e)s gâchent leur réponse par une grossière erreur de calcul numérique élémentaire, du genre $3^3 = 9$.

1.b. Ici aussi, les événements doivent être clairement décrits, et les conditions de validité des formules (incompatibilité, indépendance) doivent être clairement dégagées.

Beaucoup d'erreurs de calcul pour $P(X_3 = 2)$ et conséquemment pour $P(X_3 = 3)$.

2. La réponse à cette question, utilisant les résultats obtenus à la question 1, est souvent numériquement fausse.

Partie II

La partie II traite le cas général et aboutit au calcul de $P(X_n = k)$ et de $E(X_n)$.

3. Beaucoup de candidat(e)s ont confondu les lois uniformes sur $\{1, \dots, n\}$ et sur $\{1, \dots, n + 1\}$.

Les valeurs de l'espérance et de la variance d'une loi uniforme doivent être connues et citées directement.

4. Question peu abordée.

La réponse fausse $\frac{1}{n^{n+1}}$ est souvent donnée, au lieu de la réponse exacte $\frac{1}{n^n}$, probablement à cause de la même erreur que pour la question précédente.

5. Les explications manquent souvent de clarté.

6. Des candidat(e)s ne s'étonnent pas d'obtenir une probabilité strictement supérieure à 1.

7. L'égalité des événements considérés est en général bien vue.

Les explications pour obtenir $P(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$ sont souvent floues.

La vérification pour $k = 0$, pour $k = 1$, est bien faite.

8. Question en général bien traitée.

9. L'égalité demandée est rarement établie.

La valeur de $E(X_n)$, quitte à admettre le résultat précédent, est plus souvent obtenue.

10. Question peu abordée, les candidat(e)s n'ayant peut-être pas vu le lien avec les questions 7 et 8.

Partie III

La partie III étudie le comportement de $P(X_n = k)$, pour k fixé, et de $E(X_n)$, lorsque n tend vers l'infini.

11. Question rarement abordée.

12. Question résolue dans un nombre significatif de copies, et de façon en général correcte.

13. Question abordée dans une minorité de copies, et alors en général correctement résolue.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un très bon sujet, équilibré, progressif, complet et couvrant une large partie des connaissances exigibles, bien gradué en difficulté, conforme à la lettre et à l'esprit du programme, bien adapté à la voie économique, et un peu long, ce dont il a été tenu compte dans l'établissement du barème.

Dans l'exercice 3 (probabilités), une erreur s'est glissée dans l'énoncé à la sixième ligne, dans une phrase illustrative. Le nombre 6 ne peut pas apparaître dans un tirage et l'énoncé aurait dû comporter, à la place de ce nombre 6, n'importe quel nombre entier entre 1 et 5. De très rares candidat(e)s (moins de 1%) ont remarqué cette coquille. Celle-ci n'a eu aucune incidence sur la production des candidat(e)s.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi, grâce à quelques questions ouvertes, la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation des deux années dans les questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions plus fines, aux meilleur(e)s de se dégager. Les correcteurs ont insisté sur la grande hétérogénéité des copies. Les candidat(e)s non préparé(e)s n'ont pas pu donner le change : la quasi-totalité des questions exigeait la connaissance du cours.

L'aptitude au calcul, les capacités à relier différentes questions, à argumenter et à synthétiser font partie des critères d'évaluation des copies.

Les deux premiers exercices sont abordés dans la quasi-totalité des copies.

Dans l'ensemble, la présentation a paru convenable, malgré quelques copies très peu soignées ou illisibles. Mais la rédaction est souvent trop approximative et les candidat(e)s manquent de rigueur dans les notations, les phrases mathématiques et l'argumentation.

Il est impératif que les questions soient numérotées selon l'énoncé et clairement séparées. Les résultats et les réponses doivent être mis en évidence, par exemple en les encadrant proprement (à la règle).

L'éventail complet des notes a été utilisé et le sujet a joué parfaitement son rôle de sélection.

Au bilan, les candidat(e)s n'ont pas été surpris(es) et le sérieux du travail a été récompensé.

Moyenne de l'épreuve : 10.10 / 20 .