Problème (essec II 2023)

Remarque préliminaire

Afin de mieux comprendre les notations du problème, on peut imaginer que X_t représente l'abscisse d'un mobile à l'instant $t \geq 0$.

– (H_1) : à chaque instant t, le mobile est sur l'une des abscisses $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, ..., $\boxed{n}$.

– (H_2) : la position future du mobile (à l'instant t_{r+s}) ne dépend que de la position présente (à l'instant t_r), et pas des positions passées (aux instants t_1,...,t_{r-1}).
C'est le principe du processus de Markov.

– (H_3) : la probabilité pour que le mobile soit en i à l'instant t est une fonction dérivable de t.

– (H_4) : quand $i \neq j$, la probabilité pour que le mobile passe de l'abscisse $\boxed{i}$ à l'abscisse $\boxed{j}$ en h unités de temps ne dépend que de h.

Elle est de la forme $\alpha_{i,j}h + o(h)$ quand $h \to 0$.
Quand h est proche de 0, on voit donc que cette probabilité est quasi-nulle, ce qui est logique, puisqu'en un petit intervalle de temps, le mobile n'a pas le temps de changer d'abscisse.

– (H_5) : la probabilité pour que le mobile passe de l'abscisse $\boxed{i}$ à l'abscisse $\boxed{i}$ en h unités de temps ne dépend que de h.

Elle est de la forme $1 + \alpha_{i,i}h + o(h)$ quand $h \to 0$.
Quand h est proche de 0, on voit donc que cette probabilité est quasi égale à 1, ce qui est logique, puisqu'en un petit intervalle de temps, le mobile a de fortes chances de rester là où il était.

Partie I

1)Soit $j \in \{1, ..., n\}$, soient t et h des réels positifs ou nuls.

Comme $X_t(\Omega) = \{1, ..., n\}$, la famille d'événements $(X_t = i)_{1 \leq i \leq n}$ forme un système complet. La formule des probabilités totales donne alors :

$P(X_{t+h} = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P\big((X_{t+h} = j) \cap (X_t = i)\big)$.

2)• Soit $i \in \{1, ..., n\}$. Soient $t \in S_i$ et $h \geq 0$.
Comme $t \in S_i$, on a $P(X_t = i) \neq 0$, ce qui permet de définir la probabilité conditionnelle $P_{(X_t=i)}$.
Comme la famille d'événements $(X_{t+h} = j)_{1 \leq j \leq n}$ est un système complet, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} P_{(X_t=i)}(X_{t+h} = j) = 1.$$

• Soit $i \in \{1, ..., n\}$ et soit $h \geq 0$. En utilisant l'égalité précédente, on a :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=1}^{n} P_{(X_t=i)}(X_{t+h} = j) \\ &= \sum_{j \in \{1,...,n\}, j \neq i} P_{(X_t=i)}(X_{t+h} = j) + P_{(X_t=i)}(X_{t+h} = i) \end{aligned}$$

$$\underset{h\to 0}{=} \sum_{j\in\{1,\ldots,n\},j\neq i} \big(\alpha_{i,j}h + o_{i,j}(h)\big) + \big(1+\alpha_{i,i}h + o_{i,i}(h)\big) \quad \text{grâce à } (H_4) \text{ et } (H_5)$$

$$\underset{h\to 0}{=} \sum_{j\in\{1,\ldots,n\},j\neq i} \alpha_{i,j}h + \sum_{j\in\{1,\ldots,n\},j\neq i} o_{i,j}(h) + 1 + \alpha_{i,i}h + o_{i,i}(h)$$

$$\underset{h\to 0}{=} 1 + \left(\sum_{j\in\{1,\ldots,n\},j\neq i} \alpha_{i,j} + \alpha_{i,i}\right) h + \sum_{j\in\{1,\ldots,n\},j\neq i} o_{i,j}(h) + o_{i,i}(h)$$

Enfin, les deux derniers termes sont une somme de fonctions négligeables devant h en 0. C'est encore négligeable devant h en 0.

Donc $1 \underset{h\to 0}{=} 1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h + o(h)$.

• L'égalité précédente s'écrit aussi :

$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h + h\epsilon(h) = 0$ avec $\lim_{h\to 0^+} \epsilon(h) = 0$.

En divisant par h, on obtient : $\forall h>0,\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} + \epsilon(h) = 0$.

Puis, en faisant $h \to 0^+$, on obtient : $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = 0$.

3)a)Soit $j \in \{1,...,n\}$. Soient t et h des réels positifs ou nuls.

Pour obtenir le résultat demandé, on doit faire apparaître la probabilité conditionnelle $P_{(X_t=i)}$. Hélàs, celle-ci n'existe que si $t\in S_i$, c'est-à-dire si $P(X_t=i)\neq 0$.

On pose donc :

$$I = \{i \in [\![1,n]\!] \mid t \in S_i\}.$$

La question 1) donne alors :

$$\begin{aligned}
P(X_{t+h}=j) &= \sum_{i=1}^{n} P\big((X_{t+h}=j)\cap(X_t=i)\big)\\
&= \sum_{i\in I} P\big((X_{t+h}=j)\cap(X_t=i)\big) + \sum_{i\notin I} \underbrace{P\big((X_{t+h}=j)\cap(X_t=i)\big)}_{=0}\\
&= \sum_{i\in I} P_{(X_t=i)}(X_{t+h}=j)P(X_t=i) \quad (*)
\end{aligned}$$

Dans la deuxième somme, tous les termes sont nuls.
En effet, pour $i\notin I$, on a $P(X_t=i)=0$. Dans le même temps, on a l'inclusion d'événements $(X_{t+h}=j)\cap(X_t=i)\subset(X_t=i)$ qui donne :
$P\big((X_{t+h}=j)\cap(X_t=i)\big) \le P(X_t=i)$, d'où $P\big((X_{t+h}=j)\cap(X_t=i)\big)=0$.

Pour poursuivre le calcul fait en $(*)$, il faut distinguer deux cas :

• premier cas : $j\in I$
$P(X_{t+h}=j)$

$$= \sum_{i\in I, i\neq j} P_{(X_t=i)}(X_{t+h}=j)P(X_t=i) + P_{(X_t=j)}(X_{t+h}=j)P(X_t=j)$$

$$\underset{h\to 0}{=} \sum_{i\in I, i\neq j} \big(\alpha_{i,j}h + o(h)\big)P(X_t = i) + \big(1 + \alpha_{j,j}h + o(h)\big)P(X_t = j)$$

$$\underset{h\to 0}{=} P(X_t = j) + \sum_{i\in I, i\neq j} \big(\alpha_{i,j}h + o(h)\big)P(X_t = i) + \big(\alpha_{j,j}h + o(h)\big)P(X_t = j)$$

$$\underset{h\to 0}{=} P(X_t = j) + \sum_{i\in I} \big(\alpha_{i,j}h + o(h)\big)P(X_t = i)$$

$$\underset{h\to 0}{=} P(X_t = j) + \sum_{i\in I} \big(\alpha_{i,j}h + o(h)\big)P(X_t = i) + \sum_{i\notin I} \big(\alpha_{i,j}h + o(h)\big)\underbrace{P(X_t = i)}_{=0}$$

$$\underset{h\to 0}{=} P(X_t = j) + \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha_{i,j}h + o(h)\big)P(X_t = i).$$

• deuxième cas : $j \notin I$

$P(X_{t+h} = j)$

$$\underset{h\to 0}{=} \underbrace{P(X_t = j)}_{=0} + \sum_{i\in I} \big(\alpha_{i,j}h + o(h)\big)P(X_t = i)$$

$$\underset{h\to 0}{=} \underbrace{P(X_t = j)}_{=0} + \sum_{i\in I} \big(\alpha_{i,j}h + o(h)\big)P(X_t = i) + \sum_{i\notin I} \big(\alpha_{i,j}h + o(h)\big)\underbrace{P(X_t = i)}_{=0}$$

$$\underset{h\to 0}{=} P(X_t = j) + \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha_{i,j}h + o(h)\big)P(X_t = i).$$

b)Soit $j \in \{1, ..., n\}$. Soient $t \geq 0$ et $h > 0$ des réels.

$$\begin{aligned}\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} &= \frac{P(X_{t+h} = j) - P(X_t = j)}{h}\\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h} \times \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha_{i,j}h + o(h)\big)P(X_t = i) \quad \text{grâce à 3)a)}\\ &\underset{h\to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j} + \frac{o(h)}{h}\right) P(X_t = i).\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{o(h)}{h} \underset{h\to 0}{=} o(1)$ et $P(X_t = i) = f_i(t)$.

En développant et par linéarité de la somme, on déduit :

$$\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} \underset{h\to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{o(1)P(X_t = i)}_{=o(1)}.$$

Une somme de $o(1)$ est encore un $o(1)$ puisque $o(1)$ représente une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

Finalement, $\dfrac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} \underset{h\to 0}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j} + o(1).$

$\lim\limits_{h\to 0} o(1) = 0$ donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j}.$

C'est-à-dire $f_j'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j}.$

c)Soit $j \in \{1, ..., n\}$.

La j-ème composante de L_t' est $f_j'(t)$.

Par ailleurs, $L_tG = \big(f_1(t)f_2(t)...f_n(t)\big)\begin{pmatrix} . & . & . & \alpha_{1,j} & . & . & . \\ . & . & . & \alpha_{2,j} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & \alpha_{n,j} & . & . & . \end{pmatrix}$

La j-ème composante de L_tG est : $f_1(t)\alpha_{1,j}+f_2(t)\alpha_{2,j}+\cdots+f_n(t)\alpha_{n,j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\alpha_{i,j}$.

On a donc $L_t' = L_tG$.

4)$U_T \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0,T]\big)$. Une densité de U_T est donnée par :

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après le théorème de transfert, $Z_{i,T}$ admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big|f_i(t)g(t)\big|dt$ converge.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \big|f_i(t)g(t)\big|dt$ et $\displaystyle\int_{T}^{+\infty} \big|f_i(t)g(t)\big|dt$ convergent car $t \mapsto \big|f_i(t)g(t)\big|$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]T, +\infty[$.

$\displaystyle\int_{0}^{T} \big|f_i(t)g(t)\big|dt$ converge car $t \mapsto \big|f_i(t)g(t)\big|$ est continue sur $[0, T]$.

Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big|f_i(t)g(t)\big|dt$ converge, ce qui prouve que $Z_{i,T}$ admet une espérance.

$$\begin{aligned} E(Z_{i,T}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)g(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_i(t)g(t)dt + \int_{0}^{T} f_i(t)g(t)dt + \int_{T}^{+\infty} f_i(t)g(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_i(t) \times 0dt + \int_{0}^{T} f_i(t) \times \frac{1}{T}dt + \int_{T}^{+\infty} f_i(t) \times 0dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f_i(t)dt. \end{aligned}$$

5)a)En appliquant la question 3)b) avec $n = 2$ et $j = 1$, on a :

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= \sum_{i=1}^{2} f_i(t)\alpha_{i,1} \\ &= \alpha_{1,1}f_1(t) + \alpha_{2,1}f_2(t) \\ &= -af_1(t) + bf_2(t) \end{aligned}$$

Or, comme $n = 2$, on a $X_t(\Omega) = \{1, 2\}$ donc $P(X_t = 1) + P(X_t = 2) = 1$, c'est-à-dire $f_1(t) + f_2(t) = 1$ ou encore $f_2(t) = 1 - f_1(t)$.

On déduit :

$f_1'(t) = -af_1(t) + b\big(1 - f_1(t)\big) = -(a+b)f_1(t) + b.$

Donc $\forall t \geq 0,\ f_1'(t) + (a+b)f_1(t) = b.$

f_1 est donc solution de l'équation différentielle $y' + (a+b)y = b.$

b)Résolvons l'équation différentielle (E) : $y' + (a+b)y = b.$

On résout l'équation différentielle homogène associée (E_0) : $y' + (a+b)y = 0.$
Les solutions sont de la forme $t \mapsto \beta e^{-(a+b)t}$, où $\beta \in \mathbf{R}$.

Une solution particulière de (E) est : $t \mapsto \dfrac{b}{a+b} = p.$

Les solutions de (E) sont donc de la forme $t \mapsto p + \beta e^{-(a+b)t}$, où $\beta \in \mathbf{R}$.

Comme f_1 est solution de (E), il existe alors un réel β tel que

$$\forall t \geq 0,\ f_1(t) = p + \beta e^{-(a+b)t}.$$

Enfin, $f_1(0) = \alpha$ donne $p + \beta = \alpha$, soit $\beta = \alpha - p$.

On déduit :

$$\forall t \geq 0,\ f_1(t) = p + \big(\alpha - p\big)e^{-(a+b)t}.$$

Puis, compte tenu que $f_2(t) = 1 - f_1(t)$ et $q = 1 - p$, on a :

$$\forall t \geq 0,\ f_2(t) = q - \big(\alpha - p\big)e^{-(a+b)t}.$$

c)Le plus simple est de distinguer deux cas :

• premier cas : $p \geq \alpha$
On a alors $min(p, \alpha) = \alpha$ et $max(p, \alpha) = p$.

$\forall t \geq 0,\ -(a+b)t \leq 0$ donc $e^{-(a+b)t} \leq 1$, puis $0 \leq e^{-(a+b)t} \leq 1$.

En multipliant membre à membre par $\alpha - p \leq 0$, on a :

$0 \geq (\alpha - p)e^{-(a+b)t} \geq \alpha - p.$

Puis en ajoutant p dans chaque membre : $p \geq p + (\alpha - p)e^{-(a+b)t} \geq \alpha,$

c'est-à-dire : $\alpha \leq f_1(t) \leq p$, ou encore $min(p, \alpha) \leq f_1(t) \leq max(p, \alpha)$.

• deuxième cas : $p \leq \alpha$
On a alors $min(p, \alpha) = p$ et $max(p, \alpha) = \alpha$.

On part de $\forall t \geq 0,\ 0 \leq e^{-(a+b)t} \leq 1.$

En multipliant membre à membre par $\alpha - p \geq 0$, on a :

$0 \leq (\alpha - p)e^{-(a+b)t} \leq \alpha - p.$

Puis en ajoutant p dans chaque membre : $p \leq p + (\alpha - p)e^{-(a+b)t} \leq \alpha,$

c'est-à-dire : $p \leq f_1(t) \leq \alpha$, ou encore $min(p, \alpha) \leq f_1(t) \leq max(p, \alpha)$.

Enfin, comme $a + b > 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} -(a+b)t = -\infty.$

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0.$

Par composition, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-(a+b)t} = 0.$

D'où $\lim\limits_{t \to +\infty} f_1(t) = p.$

$$\begin{aligned}
\text{d)}e_1(T) &= \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \Big(p + \big(\alpha - p\big)e^{-(a+b)t}\Big)\,dt \\
&= \frac{1}{T}\left[pt + \frac{\alpha - p}{-(a+b)}e^{-(a+b)t}\right]_0^T \\
&= \frac{1}{T}\left[\left(pT + \frac{\alpha - p}{-(a+b)}e^{-(a+b)T}\right) - \left(\frac{\alpha - p}{-(a+b)}\right)\right] \\
&= p - \frac{\alpha - p}{(a+b)T}e^{-(a+b)T} + \frac{\alpha - p}{T(a+b)}.
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{T\to+\infty} e^{-(a+b)T} = 0$ et $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{\alpha - p}{(a+b)T} = 0.$

Par produit, $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{\alpha - p}{(a+b)T}e^{-(a+b)T} = 0$, puis par somme :

$$\lim_{T\to+\infty} e_1(T) = p.$$

6)a)En notant I la matrice identité d'ordre 3, on a ;

$$\bullet\ G + \frac{1}{6}I = G + \frac{1}{30}\times 5I$$
$$= \frac{1}{30}\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$G + \dfrac{1}{6}I$ a deux colonnes identiques donc son rang est strictement inférieur à 3 (il vaut 2 en fait).

Donc elle n'est pas inversible, ce qui prouve que $-\dfrac{1}{6}$ est valeur propre de G.

• De même, $G + \dfrac{1}{10}I = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On constate que les colonnes C_1, C_2 et C_3 de cette matrice sont liées, puisque $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$.

Cela prouve que le rang de $G + \dfrac{1}{10}I$ est strictement inférieur à 3.

Donc $G + \dfrac{1}{10}I$ n'est pas inversible et $-\dfrac{1}{10}$ est valeur propre de G.

• Enfin, les colonnes C_1, C_2 et C_3 de G sont liées, puisque $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.
Donc le rang de G est strictement inférieur à 3.

Donc G n'est pas inversible et 0 est valeur propre de G.

b)Vérifions que P est inversible à l'aide de la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix}$$

On obtient une matrice triangulaire inversible, puisque ses coefficients diagonaux sont non nuls. Donc P est inversible.

$$GP = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{30}P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Donc $GP = \frac{1}{30}P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Puis en multipliant membre à membre par P^{-1} à droite, on a :

$$G = \frac{1}{30}P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Remarque

On pouvait aussi remarquer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de G associés respectivement aux valeurs propres 0, $-\frac{1}{10}$ et $-\frac{1}{6}$.

G est alors diagonalisable et la formule demandée provient du cours.

c)$^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} {}^tPP = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I$.

Cela entraîne que P est inversible et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où } P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

d) $\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}'$

$$\begin{aligned}
&= \left(P^{-1}C_t\right)' \\
&= P^{-1}C_t' \qquad (*) \\
&= P^{-1}\,{}^t\left(L_t'\right) \\
&= P^{-1}\,{}^t\left(L_tG\right) \quad \text{d'après 3)c)} \\
&= P^{-1}\,{}^tG\,{}^tL_t \\
&= P^{-1}G\,{}^tL_t \quad \text{car } G \text{ est symétrique} \\
&= P^{-1}GC_t \\
&= P^{-1}\frac{1}{30}P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}P^{-1}C_t \\
&= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{10}y_2(t) \\ -\frac{1}{6}y_3(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On a bien $\begin{cases} y_1'(t) &= 0 \\ y_2'(t) &= -\frac{1}{10}y_2(t) \\ y_3'(t) &= -\frac{1}{6}y_3(t) \end{cases}$

Remarque

La ligne de calcul $(*)$ vient du fait que pour toutes matrices $A(t)$ et $B(t)$, on a : $\big(A(t)B(t)\big)' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$.

e)• y_1, y_2 et y_3 sont solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 1.
D'après le cours, il existe des constantes réelles α, β et γ telles que

$$\forall t \geq 0,\ y_1(t) = \alpha,\ y_2(t) = \beta e^{-\frac{1}{10}t} \text{ et } y_3(t) = \gamma e^{-\frac{1}{6}t}.$$

On a donc $P^{-1}C_t = \begin{pmatrix} \alpha \\ \\ \beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \\ \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}$.

Puis en mutipliant membre à membre par P à gauche : $C_t = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \\ \beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \\ \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}$.

Pour $t = 0$, on a : $C_0 = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}C_0$.

• Comme $C_t = \begin{pmatrix} P(X_t = 1) \\ P(X_t = 2) \\ P(X_t = 3) \end{pmatrix}$, on déduit pour tout réel $t \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} P(X_t = 1) \\ P(X_t = 2) \\ P(X_t = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \\ \beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \\ \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} + \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \\ \\ \alpha - 2\beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \\ \alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} - \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}.$$

$\lim\limits_{t \to +\infty} P(X_t = 1) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} + \gamma e^{-\frac{1}{6}t}\right) = \alpha$,

$\lim\limits_{t \to +\infty} P(X_t = 2) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\alpha - 2\beta e^{-\frac{1}{10}t}\right) = \alpha$,

$\lim\limits_{t \to +\infty} P(X_t = 3) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\alpha + \beta e^{-\frac{1}{10}t} - \gamma e^{-\frac{1}{6}t}\right) = \alpha$.

De plus, comme $X_t(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, on a : $P(X_t = 1) + P(X_t = 2) + P(X_t = 3) = 1$.

En passant à la limite, on obtient : $\alpha + \alpha + \alpha = 1$, soit $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Ainsi, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} P(X_t = i) = \dfrac{1}{3}$.

7)a)Soit $x > 0$ et $k \in \mathbf{N}^*$ assez grand.

• La formule des probabilités composées donne :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left(X_{\frac{j}{k}x} = i\right)\right) &= P(X_0 = i) \prod_{j=0}^{k-1} P_{\bigcap\limits_{n=0}^{j} \left(X_{\frac{n}{k}x} = i\right)} \left(X_{\frac{j+1}{k}x} = i\right) \\ &= P(X_0 = i) \prod_{j=0}^{k-1} P_{\left(X_{\frac{j}{k}x} = i\right)} \left(X_{\frac{j+1}{k}x} = i\right) \quad \text{d'après } (H_2). \end{aligned}$$

• On remarque ensuite que pour tout entier $j \in [\![0, k-1]\!]$:

$P_{\left(X_{\frac{j}{k}x} = i\right)} \left(X_{\frac{j+1}{k}x} = i\right) = P_{\left(X_{\frac{j}{k}x} = i\right)} \left(X_{\frac{j}{k}x + \frac{x}{k}} = i\right)$

En appliquant l'hypothèse (H_5) avec $t = \frac{j}{k}x$ et $h = \frac{x}{k} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$, on a :

$P_{\left(X_{\frac{j}{k}x}=i\right)}\left(X_{\frac{j+1}{k}x}=i\right) \underset{k\to+\infty}{=} 1+\alpha_{i,i}\frac{x}{k}+o\left(\frac{x}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} 1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)$

En mutipliant membre à membre les k égalités pour $j \in [\![0,k-1]\!]$, on a :

$\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} P_{\left(X_{\frac{j}{k}x}=i\right)}\left(X_{\frac{j+1}{k}x}=i\right) = \left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k.$

Ainsi, $P\left(\displaystyle\bigcap_{j=0}^{k}\left(X_{\frac{j}{k}x}=i\right)\right) = P(X_0=i)\left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k.$

b)• Soit $x>0$. Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$P_{(X_0=i)}(Y_i>x) = \dfrac{P\big((X_0=i)\cap(Y_i>x)\big)}{P(X_0=i)}.$

On a l'inclusion $(Y_i>x)\subset(X_0=i)$.
En effet, supposons l'événement $(Y_i>x)$ réalisé.
Cela signifie que le premier instant t où $X_t\neq i$ est strictement supérieur à x.
Alors, pour tout instant $t\in[0,x[$, on doit avoir $X_t=i$.
En particulier, pour $t=0$, cela mène à $X_0=i$.

Cette inclusion entraîne que $(X_0=i)\cap(Y_i>x)=(Y_i>x)$.

Donc $P_{(X_0=i)}(Y_i>x) = \dfrac{P(Y_i>x)}{P(X_0=i)}$ $\quad(*)$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
P(Y_i>x) &= \lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left(X_{\frac{j}{k}x}=i\right)\right) \quad \text{par hypothèse de l'énoncé}\\
&= \lim_{k\to+\infty} P(X_0=i)\left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k \quad \text{d'après 7)a)}\\
&= P(X_0=i)\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k.
\end{aligned}$$

Pour déterminer cette limite, on repasse par une forme exponentielle.

$\left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k = exp\left(k\ln\left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right).$

$\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)=0$ et $\ln(1+x)\underset{x\to0}{\sim}x$.

Donc $\ln\left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\beta_i}{k}x.$

Donc $k\ln\left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\beta_i x.$

Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{t\to-\beta_i x} e^t = e^{-\beta_i x}.$

Par composition, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{\beta_i}{k}x+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k = e^{-\beta_i x}$ $\quad(**)$

Avec $(*)$ et $(**)$, on conclut que $\forall x>0,\ P_{(X_0=i)}(Y_i>x)=e^{-\beta_i x}$.

Il reste à se persuader que l'égalité précédente est encore vraie pour $x = 0$, c'est-à-dire que $P_{(X_0=i)}(Y_i > 0) = 1$.
En effet, supposons l'événement $(X_0 = i)$ réalisé.
Alors, le premier instant t où $X_t \neq i$ ne peut pas valoir 0. Il est donc strictement positif, ce qui réalise l'événement $(Y_i > 0)$.

$$\text{Donc } \forall x \geq 0,\ P_{(X_0=i)}(Y_i > x) = e^{-\beta_i x}.$$

• En passant à l'événement contraire, on a d'après la question précédente :
$\forall x \geq 0,\ P_{(X_0=i)}(Y_i \leq x) = 1 - e^{-\beta_i x}$.
De plus, comme Y_i prend ses valeurs dans $\mathbf{R}_+$, on a $\forall x < 0,\ P_{(X_0=i)}(Y_i \leq x) = 0$.
La loi de Y_i conditionnée par l'événement $(X_0 = i)$ est donc la loi exponentielle de paramètre β_i.

c)Afin d'assurer l'existence des probabilités conditionnelles ci-dessous, posons :

$$I = \{k \in [\![1, n]\!] \mid P(X_0 = k) \neq 0\}.$$

Soit $x \geq 0$.
La formule des probabilités totales pour le système complet $(X_0 = k)_{1 \leq k \leq n}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
P(Y > x) &= \sum_{k=1}^{n} P\big((Y > x) \cap (X_0 = k)\big) \\
&= \sum_{k \in I} P\big((Y > x) \cap (X_0 = k)\big) + \sum_{k \notin I} \underbrace{P\big((Y > x) \cap (X_0 = k)\big)}_{=0} \\
&= \sum_{k \in I} P(X_0 = k) P_{(X_0=k)}(Y > x)
\end{aligned}$$

Or, si $(X_0 = k)$ est réalisé, on a $Y = Y_k$. puisque $\forall t \geq 0,\ X_t \neq k \iff X_t \neq X_0$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } P(Y > x) &= \sum_{k \in I} P(X_0 = k) P_{(X_0=k)}(Y_k > x) \\
&= \sum_{k \in I} P(X_0 = k) e^{-\beta_k x} \quad \text{d'après 7)b)} \\
&= \sum_{k \in I} P(X_0 = k) e^{-\beta_k x} + \sum_{k \notin I} \underbrace{P(X_0 = k)}_{=0} e^{-\beta_k x} \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k) e^{-\beta_k x}.
\end{aligned}$$

d)La question précédente donne :

$$\forall x \geq 0,\ P(Y \leq x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k) e^{-\beta_k x}.$$

Par ailleurs, comme Y prend ses valeurs dans $\mathbf{R}_+$, on a : $\forall x < 0,\ P(Y \leq x) = 0$.
En notant F_Y la fonction de répartition de Y, on a donc :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k) e^{-\beta_k x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

• F_Y est continue sur $]-\infty,0[$ comme fonction nulle.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la fonction $x \mapsto e^{-\beta_k x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
F_Y est donc continue sur $[0,+\infty[$ comme somme de fonctions continues.
Donc F_Y est continue sur $\mathbf{R}*$ et continue à droite en zéro.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$,
et $F_Y(0) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k) = 0$ car $(X_0 = k)_{1\leq k\leq n}$ est un système complet.
On a donc $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Y(x) = F_Y(0)$, ce qui prouve la continuité à gauche de F_Y en 0, puis la continuité de F_Y en 0.
Ainsi, F_Y est continue sur $\mathbf{R}$.
• F_Y est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ comme fonction nulle.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la fonction $x \mapsto e^{-\beta_k x}$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.
F_Y est donc de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ comme somme de fonctions C^1.
Donc F_Y est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en zéro.
• On peut donc conclure que Y est une variable aléatoire à densité.
Une densité f_Y de Y s'obtient en dérivant F_Y aux points où elle est dérivable, c'est-à-dire sur $\mathbf{R}^*$.
En 0, on pourra prendre pour f_Y une valeur arbitraire positive ou nulle.
Donc $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k)\beta_k e^{-\beta_k x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
En prenant par exemple $f_Y(0) = 0$, on a alors en recollant les formules :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k)\beta_k e^{-\beta_k x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

e)Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|xf_Y(x)\right| dx$ converge.
Comme f_Y est nulle sur $]-\infty,0]$ et que $x \mapsto xf_y(x)$ est positive sur $[0,+\infty[$, on est ramené à montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf_Y(x)dx$.
Pout tout réel $A > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^A xf_Y(x)dx &= \int_0^A x\left(\sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k)\beta_k e^{-\beta_k x}\right) dx \\
&= \int_0^A \sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k)x\beta_k e^{-\beta_k x} dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_0^A P(X_0 = k)x\beta_k e^{-\beta_k x} dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k) \int_0^A x\beta_k e^{-\beta_k x} dx.
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, posons $g_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0 \\ \beta_k e^{-\beta_k x} & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$

Il s'en suit :

$$\begin{aligned} \int_0^A x f_Y(x) dx &= \sum_{k=1}^n P(X_0 = k) \int_0^A x g_k(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n P(X_0 = k) \int_{-\infty}^A x g_k(x) dx \quad \text{car } g_k \text{ est nulle sur }]-\infty, 0[\end{aligned}$$

Enfin, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x g_k(x) dx$ converge et vaut $E(W_k) = \dfrac{1}{\beta_k}$ où $W_k \hookrightarrow \mathscr{E}(\beta_k)$.

Donc $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_{-\infty}^A x g_k(x) dx = \frac{1}{\beta_k}$.

Par opérations sur les limites, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A x f_Y(x) dx$ existe et est égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^n P(X_0 = k) \times \frac{1}{\beta_k}$.

Donc $\displaystyle\int_0^A x f_Y(x) dx$ est convergente, ce qui prouve que Y admet une espérance.

De plus, $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{P(X_0 = k)}{\beta_k}$.

Comme $\forall k \notin I,\ P(X_0 = k) = 0$, on peut se limiter aux indices k de I.

$$\text{Donc } E(Y) = \sum_{k \in I} \frac{P(X_0 = k)}{\beta_k}.$$

Partie II

8)a)Réutilisons $I = \{k \in [\![1,n]\!] \mid P(X_0 = k) \neq 0\}$.

Pour tout réel $s \geq 0$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la formule des probabilités totales pour le système complet $(X_0 = k)_{1 \leq k \leq n}$ donne :

$$\begin{aligned}
P(X_s = j) &= \sum_{k=1}^{n} P\big((X_0 = k) \cap (X_s = j)\big) \\
&= \sum_{k \in I} P\big((X_0 = k) \cap (X_s = j)\big) + \sum_{k \notin I} \underbrace{P\big((X_0 = k) \cap (X_s = j)\big)}_{=0} \\
&= \sum_{k \in I} P(X_0 = k) P_{(X_0 = k)}(X_s = j) \\
&= \sum_{k \in I} P(X_0 = k) m_{k,j}(s) \\
&= \sum_{k \in I} P(X_0 = k) m_{k,j}(s) + \sum_{k \notin I} \underbrace{P(X_0 = k) m_{k,j}(s)}_{=0} \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X_0 = k) m_{k,j}(s) \\
&= \sum_{k=1}^{n} L_0[k] m_{k,j}(s) \\
&= \big(L_0 M(s)\big)[j].
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall s \geq 0,\ L_s = L_0 M(s).$$

b)Soient i, j et k dans $[\![1,n]\!]$ et $r \in S_i$.

Distinguons deux cas :

• premier cas : $P\big((X_r = i) \cap (X_{r+s} = k)\big) = 0$

D'une part, on a : $(X_r = i) \cap (X_{r+s} = k) \cap (X_{r+s+t} = j) \subset (X_r = i) \cap (X_{r+s} = k)$.

Donc $0 \leq P\big((X_r = i) \cap (X_{r+s} = k) \cap (X_{r+s+t} = j)\big) \leq \underbrace{P\big((X_r = i) \cap (X_{r+s} = k)\big)}_{=0}$.

Et on déduit que $P\big((X_r = i) \cap (X_{r+s} = k) \cap (X_{r+s+t} = j)\big) = 0$.

D'autre part, $m_{i,k}(s) = P_{(X_r = i)}(X_{r+s} = k) = \dfrac{P\big((X_r = i) \cap (X_{r+s} = k)\big)}{P(X_r = i)} = 0$

(on remarquera au passage que la probabilité conditionnelle est bien définie car par énoncé, on a $r \in S_i$).

Finalement, $P\big((X_r = i) \cap (X_{r+s} = k) \cap (X_{r+s+t} = j)\big) = P(X_r = i) m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$.

• deuxième cas : $P\big((X_r = i) \cap (X_{r+s} = k)\big) =\neq 0$

$P\big((X_r = i) \cap (X_{r+s} = k) \cap (X_{r+s+t} = j)\big)$

$= P_{\big((X_r = i) \cap (X_{r+s} = k)\big)}(X_{r+s+t} = j) P\big((X_r = i) \cap (X_{r+s} = k)\big)$

$= P_{(X_{r+s} = k)}(X_{r+s+t} = j) P\big((X_r = i) \cap (X_{r+s} = k)\big)$ d'après (H_2)

$= P_{(X_{r+s}=k)}(X_{r+s+t}=j)P(X_r=i)P_{(X_r=i)}(X_{r+s}=k)$
$= m_{k,j}(t)P(X_r=i)m_{i,k}(s)$

Dans tous les cas, on a bien :

$$P\big((X_r=i)\cap(X_{r+s}=k)\cap(X_{r+s+t}=j)\big)=P(X_r=i)m_{i,k}(s)m_{k,j}(t).$$

La formule des probabilités totales pour le système complet $(X_{r+s}=k)_{1\leq k\leq n}$ donne enfin :

$$\begin{aligned}P\big((X_r=i)\cap(X_{r+s+t}=j)\big)&=\sum_{k=1}^{n}P\big((X_r=i)\cap(X_{r+s}=k)\cap(X_{r+s+t}=j)\big)\\&=\sum_{k=1}^{n}P(X_r=i)m_{i,k}(s)m_{k,j}(t)\\&=P(X_r=i)\sum_{k=1}^{n}m_{i,k}(s)m_{k,j}(t).\end{aligned}$$

c)Soient s et t des réels positifs. Soient i et j dans $[\![1,n]\!]$.

• le coefficient (i,j) de $M(s)M(t)$ est :

$$\sum_{k=1}^{n}m_{i,k}(s)m_{k,j}(t).$$

• le coefficient (i,j) de $M(s+t)$ est :

$$m_{i,j}(s+t)=P_{(X_r=i)}(X_{r+s+t=j})=\frac{P\big((X_r=i)\cap(X_{r+s+t=j})\big)}{P(X_r=i)}.$$

Il ne dépend pas de r d'après les hypothèses (H_4) et (H_5).
On va donc choisir r de sorte que $P(X_r=i)\neq 0$, pour pouvoir donner un sens aux formules précédentes.
C'est possible de trouver un tel r, grâce à l'hypothèse (H_2) qui suppose que la fonction $t\mapsto P(X_t=i)$ n'est pas la fonction nulle !

D'après la question 8)b), on a : $\dfrac{P\big((X_r=i)\cap(X_{r+s+t=j})\big)}{P(X_r=i)}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{i,k}(s)m_{k,j}(t).$

Ainsi, pour tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, les coefficients (i,j) des matrices $M(s+t)$ et $M(s)M(t)$ sont idetiques.

$$\text{Donc } M(s+t)=M(s)M(t).$$

d)Soit $t\geq 0$ un réel.
Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $M(kt)=\big(M(t)\big)^k$ ».
Montrons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k\in\mathbf{N}^*$.
$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $M(t)=\big(M(t)\big)^1$ », ce qui est vrai.
Soit $k\in\mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
M\big((k+1)t\big) &= M(kt+t)\\
&= M(kt)M(t) \quad \text{grâce à 8)c)}\\
&= \big(M(t)\big)^k M(t) \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= \big(M(t)\big)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall t \geq 0, \forall k \in \mathbf{N}^*,\ M(kt) = \big(M(t)\big)^k$.

9)a)Un premier programme possible :

```
import numpy as np
def transition(t,G):
    n=len(G)
    I=np.eye(n)
    A=I+(t/1000)*G
    B=I
    for k in range(1000):
        B=np.dot(A,B)
    return B
```

Ou plus simplement, si on se souvient de la fonction matrixpower :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
def transition(t,G):
    n=len(G)
    I=np.eye(n)
    A=I+(t/1000)*G
    return(al.matrix_power(A,1000))
```

b)C'est une question un peu délicate. Quelle que soit la méthode utilisée, il est indispensable d'utiliser la question 8)a) qui permet de construire la loi de X_s à partir de la matrice de transition $M(s)$:

$$\forall s \geq 0,\ L_s = L_0 M(s).$$

Voici ma proposition :

```
import matplotlib.pyplot as plt
def traceLoi2Xt(G,L0,tmax):
    n=len(G)
    temps=np.linspace(0,tmax,1000)
    for i in range(n):
        position=[]
        for k in range(1000):
            loi=np.dot(L0,transition(temps[k],G))
            position.append(loi[i])
        plt.plot(temps,position)
    plt.show()
```

Explications

• on crée un vecteur *temps* à pas constant formé de 1000 composantes uniformément réparties entre 0 et tmax,

• pour chaque valeur de i comprise entre 0 et n-1 :

− on crée une liste, intitulée *position*, dont les composantes en fin de deuxième boucle seront égales à $P(X_t = i)$ où t est un instant de la subdivision temps,

− pour chaque valeur de k comprise entre 0 et 999, on crée la matrice ligne *loi* qui représente la loi de $X_{temps[k]}$, on lui extrait sa i-ème composante loi[i] qui représente la probabilité $P\big(X_{temps[k]} = i\big)$ et qu'on ajoute à la liste *position* grâce à la commande *append*.

Une proposition plus élaborée d'un collègue (Stéphane Preteseille) :

```
import matplotlib.pyplot as plt
def traceLoi2Xt(G,L0,tmax):
    n,n=np.shape(G)
    temps=np.linspace(0,tmax,1000)
    L=np.zeros([n,1000])
    for k in range(1000):
        L[:,k]=np.dot(L0,transition(temps[k],G))
    for i in range(n):
        plt.plot(temps,L[i,:])
    plt.show()
```

Explications

• On crée une matrice L à n lignes et 1000 colonnes :

− une colonne donnée est la loi de X_t à un instant t de la subdivision *temps*,

− une ligne i donnée est constituée des probabilités $P(X_t = i)$ où t parcourt la subdivision *temps*.

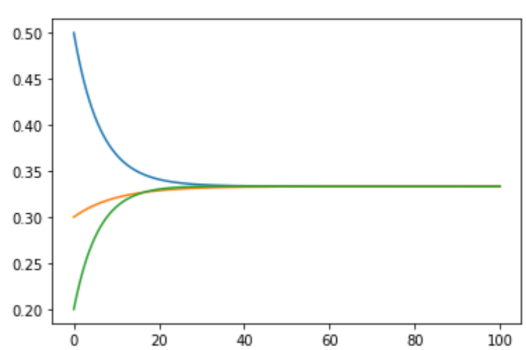
• Dans la première boucle, on construit la matrice L colonne par colonne grâce à la commande L[:,k]=...

Puis la matrice étant construite, on extrait chacune des lignes L[i, :].

c)Ce graphique représente les fonctions $f_i : t \mapsto P(X_t = i)$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$.

Initialement, on a : $P(X_0 = 1) = 0.5 \quad P(X_0 = 2) = 0.3$ et $P(X_0 = 3) = 0.5$

Pour t grand, on a : $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) \approx 1/3$, ce qui confirme que $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $\lim\limits_{t\to+\infty} P(X_t = i) = 1/3$ (voir question 6)e)).



d)programme complété :

```
def simulX(t,k,L0,G):
    listeDesT=[];
    listeDesX=[]
    Mt=transition(t,G);
    Lt=L0
    for i in range(k+1):
        listeDesT.append(i*t)
        p=rd.random()
        s=Lt[0]
        j=0
        while p>s:
            j+=1
            s+=Lt[j]
        Lt=np.dot(Lt,Mt)
        listeDesX.append(j+1)
    plt.plot(listeDesT,listeDesX);
    plt.show()
```

Explications

• listeDesT est la liste constituée des instants 0, t, $2t, \cdots, kt$.
On part de la liste vide, puis on la construit de proche en proche à l'aide de la commande *append*.

• La liste Lt [1] est évolutive.
Initialement, elle vaut L_0 et représente la loi de X_0.
Puis, elle vaut L_t, L_{2t}, ..., L_{kt}.
Pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, L_{it} représente donc la loi de X_{it}.
Comment faire évoluer la liste Lt ? C'est en servant des questions 8)a) et 8)c).
En effet, on a :

$$\begin{aligned} L_{(i+1)t} &= L_0 M\big((i+1)t\big) \quad \text{d'après 8)a)} \\ &= L_0 M(it+t) \\ &= L_0 M(it) M(t) \quad \text{d'après 8)c)} \\ &= L_{it} M(t) \quad \text{d'après 8)a).} \end{aligned}$$

Aussi, la troisième ligne à compléter est : Lt=np.dot(Lt,Mt)

• On utilise deux variables :
− une variable p, réel aléatoire de [0,1],
− pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, une variable s cumulant les probabilités de la loi de X_{it}, ce cumul s'effectuant par la commande s+=Lt[j].

Du fait de ce cumul, il est logique d'initialiser la valeur de s.
La première ligne à compléter est : s=Lt[0]

• Il reste à construire listeDesX, liste constituée d'une simulation de chacune des variables aléatoires X_0, X_t, X_{2t}, ..., X_{kt}.

Pour obtenir une valeur aléatoire de X_{it}, on compare p et s.
La deuxième ligne à compléter est : while p>s.

1. je trouve que le concepteur devrait plutôt l'appeler L car la lettre t est déjà prise

En effet :

$-$ si $p \in [0, \underbrace{P(X_{it}=1)}_{Lt[0]}]$, on ne fait pas la boucle et on considère que $X_{it}=1$,

$-$ si $p \in]\underbrace{P(X_{it}=1)}_{Lt[0]}, \underbrace{P(X_{it}=1)}_{Lt[0]} + \underbrace{P(X_{it}=2)}_{Lt[1]}]$, on considère que $X_{it}=2$ car la longueur de l'intervalle est $P(X_{it}=2)$,

.... etc ....

$-$ si $p \in]\underbrace{P(X_{it}=1)}_{Lt[0]} + \cdots + \underbrace{P(X_{it}=1)}_{Lt[n-2]}, \underbrace{P(X_{it}=1)}_{Lt[0]} + \cdots + \underbrace{P(X_{it}=n)}_{Lt[n-1]}]$, on considère que $X_{it}=n$ car la longueur de l'intervalle est $P(X_{it}=n)$.

Enfin, si la boucle while est faite j fois, c'est que $X_{it}=j+1$, d'où la commande listeDesX.append(j+1).

Partie III

10)a)On a déjà : $G^2 = \begin{pmatrix} (-\alpha-\beta)^2 & \alpha(-\alpha-\beta) & \beta(-\alpha-\beta) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-\alpha-\beta)G$.

Soit $\mathscr{P}(i)$ la proposition : « $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G$ ».

Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(i)$ est vraie pour tout $i \in \mathbf{N}^*$.

$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $G^1 = (-\alpha-\beta)^0 G$ », ce qui est vrai.

Soit $i \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(i)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(i+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} G^{i+1} &= GG^i \\ &= G(-\alpha-\beta)^{i-1}G \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (-\alpha-\beta)^{i-1}G^2 \\ &= (-\alpha-\beta)^{i-1}(-\alpha-\beta)G \\ &= (-\alpha-\beta)^i G. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(i+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall i \in \mathbf{N}^*,\ G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G$.

b)Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}$.

Comme I_3 et $\dfrac{t}{k}G$ commutent, la formule du binôme s'applique et donne :

$$\begin{aligned} \left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k &= \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} I_3^{k-i} \left(\frac{t}{k}G\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{t}{k}\right)^i G^i \\ &= \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{t}{k}\right)^0 G^0 + \sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{t}{k}\right)^i G^i \\ &= I + \sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1} G \\ &= I + \left(\sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1}\right) G. \end{aligned}$$

c)• $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1}$

$$\begin{aligned} &= \left[\sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1}\right] - \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{t}{k}\right)^0 (-\alpha-\beta)^{-1} \\ &= \left[\sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i}(-\alpha-\beta)^{-1}\right] + \frac{1}{\alpha+\beta} \\ &= -\frac{1}{\alpha+\beta}\left[\sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \left(-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^i\right] + \frac{1}{\alpha+\beta} \quad (*) \end{aligned}$$

La formule du binôme donne enfin :

$$\sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \left(-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^{i} = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} 1^{k-i} \left(-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^{i} = \left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^{k}.$$

En reportant dans $(*)$, on déduit :

$$\sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{t}{k}\right)^{i} (-\alpha-\beta)^{i-1} = \frac{1-\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^{k}}{\alpha+\beta}.$$

• Des calculs précédents, on déduit que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \forall t \in \mathbf{R},\ \left(I_3+\frac{t}{k}G\right)^{k} = I_3 + \frac{1-\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^{k}}{\alpha+\beta}G \quad (***)$$

De plus, on sait d'après $(**)$ que $M(t) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(I_3+\frac{t}{k}G\right)^{k}$.

ce qui incite à chercher $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^{k}$.

Or, $\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^{k} = exp\left(k\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)\right)$.

$\lim\limits_{k\to+\infty} -(\alpha+\beta)\frac{t}{k} = 0$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -(\alpha+\beta)\frac{t}{k}$.

Puis, $k\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -(\alpha+\beta)t$, ce qui signifie que :

$\lim\limits_{k\to+\infty} k\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) = -(\alpha+\beta)t$, puis :

$\lim\limits_{k\to+\infty} \left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^{k} = \lim\limits_{k\to+\infty} exp\left(k\ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)\right) = exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)$.

En passant à la limite dans $(***)$, on conclut que :

$\lim\limits_{k\to+\infty} \left(I_3+\frac{t}{k}G\right)^{k} = I_3 + \frac{1-exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)}{\alpha+\beta}G$, c'est-à-dire :

$$\forall t \geq 0,\ M(t) = I_3 + \frac{1-exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)}{\alpha+\beta}G.$$

d)D'après la question 8)a), on a :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0,\ L_t &= L_0 M(t) \\ &= L_0\left(I_3 + \frac{1-exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)}{\alpha+\beta}G\right) \\ &= L_0 + \frac{1-exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)}{\alpha+\beta}L_0G \quad \text{en distribuant} \end{aligned}$$

En remplaçant L_0 et G par leur forme matricielle et en calculant le produit, on a :

$$\begin{aligned}
L_t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1-exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} -(\alpha+\beta) & \alpha & \beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-(\alpha+\beta)\times\dfrac{1-exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)}{\alpha+\beta} & \alpha\times\dfrac{1-exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)}{\alpha+\beta} & \beta\times\dfrac{1-exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)}{\alpha+\beta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} exp\big(-(\alpha+\beta)t\big) & \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\big(1-exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)\big) & \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\big(1-exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)\big) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or, $L_t = \begin{pmatrix} P(X_t=1) & P(X_t=2) & P(X_t=3) \end{pmatrix}$.

En identifiant, on conclut que :

$$\begin{cases}
P(X_t=1) & = exp\big(-(\alpha+\beta)t\big) \\
P(X_t=2) & = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\big(1-exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)\big) \\
P(X_t=3) & = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\big(1-exp\big(-(\alpha+\beta)t\big)\big)
\end{cases}$$

e)Pour tout $t \geq 0$, notons X_t l'état dans lequel est le débiteur.
$X_t(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et la loi de X_t est donnée par la question précédente.

On a en particulier : $P(X_0 = 1) = exp\big(-(\alpha+\beta)\times 0\big) = 1$, ce qui montre que l'événement $(X_0 = 1)$ est certain, (ce qui est logique, puisqu'à l'état initial, le débiteur est en cours de recouvrement donc dans l'état 1).

Soit Y_1 la variable aléatoire égale au premier instant t où $X_t \neq 1$.
Y_1 représente le temps passé en recouvrement.

Comme $P(X_0 = 1) \neq 0$, la question 7)b) s'applique.
La loi de Y_1 conditionnée par l'événement $(X_0 = 1)$ est alors une loi exponentielle de paramètre β_1.
L'événement $(X_0 = 1)$ étant certain, cette loi conditionnée est tout simplement la loi de Y_1.

Ainsi, $Y_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(\beta_1)$ avec $\beta_1 = -\alpha_{1,1} = -(-\alpha-\beta) = \alpha+\beta$.

11)a)$A^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
A^3 - 2A^2 + A &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{27}\left[\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{27}\left[\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 12 & -6 \\ -24 & -6 & 30 \\ 120 & -24 & -96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -9 & 0 \\ 0 & 9 & -9 \\ -36 & 0 & 36 \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

D'où $A^3 - 2A^2 + A = 0$.

Soit le polynôme $U(x) = x^3 - 2x^2 + x$. D'après ce qui précède, on a : $U(A) = 0$, ce qui signifie que U est un polynôme annulateur de A.

b)$U(x) = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$.
D'après l'indication de l'énoncé, on a donc :

$\forall x \in \mathbf{R},\ \left(1+\dfrac{\theta}{k}x\right)^k = Q(x)x(x-1)^2 + ax^2 + bx + c.$

Pour $x=0$, on obtient : $c=1$.

Pour $x=1$, on obtient : $\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^k = a+b+c.$

c)• En dérivant $(*)$, on a :

$\forall x \in \mathbf{R},\ k \times \dfrac{\theta}{k} \times \left(1+\dfrac{\theta}{k}x\right)^{k-1} = Q'(x)U(x) + Q(x)U'(x) + 2ax + b$, c'est-à-dire :

$\forall x \in \mathbf{R},\ \theta\left(1+\dfrac{\theta}{k}x\right)^{k-1} = Q'(x)x(x-1)^2 + Q(x)(3x^2-4x+1) + 2ax + b.$

Pour $x=1$, les polynômes $x(x-1)^2$ et $3x^2-4x+1$ s'annulent, ce qui donne :

$\theta\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^{k-1} = 2a+b.$

• Compte tenu de la question précédente, on a donc le système :

$$\begin{cases} a+b+c = \left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^k \\ 2a+b = \theta\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^{k-1} \\ c=1 \end{cases}$$

Ce qui entraîne : $\begin{cases} a+b = \left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^k - 1 & L_1 \\ 2a+b = \theta\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^{k-1} & L_2 \end{cases}$

$L_2 - L_1$ donne : $a = \theta\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^k + 1$

$2L_1 - L_2$ donne : $b = 2\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1+\dfrac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2.$

d)• L'égalité $(*)$ de la question 11)a) donne en remplaçant x par A :

$\forall \theta \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{N}^*,\ \left(I_3+\dfrac{\theta}{k}A\right)^k$

$= Q(A)\underbrace{U(A)}_{=0} + aA^2 + bA + cI_3$

$= \left(\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k + 1\right)A^2 + \left(2\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2\right)A + I_3.$

En remarquant que $G = -\alpha A$, on a tout intérêt à prendre $\theta = -\alpha t$, ce qui donne pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et tout réel $t \geq 0$:

$$\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = a(k,t)A^2 + b(k,t)A + I_3$$

où $a(k,t) = \Big(-\alpha t\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1} - \left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k} + 1\Big)$ et $b(k,t) = \Big(2\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k} + \alpha t\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1} - 2\Big)$.

En faisant la même méthode que dans la question 10)c), on a :

$\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k} = e^{-\alpha t}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1} = e^{-\alpha t}$.

D'où $\lim\limits_{k\to+\infty} a(k,t) = -\alpha t e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t} + 1 = 1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}$

et $\lim\limits_{k\to+\infty} b(k,t) = 2e^{-\alpha t} + \alpha t e^{-\alpha t} - 2 = (2+\alpha t)e^{-\alpha t} - 2$.

On déduit finalement :

$\lim\limits_{k\to+\infty}\left(I_3 + \dfrac{t}{k}G\right)^{k} = \big(1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}\big)A^2 + \big((2+\alpha t)e^{-\alpha t}-2\big)A + I_3$, c'est-à-dire :

$$M(t) = \big(1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}\big)A^2 + \big((2+\alpha t)e^{-\alpha t}-2\big)A + I_3.$$

• D'après la question 8)a), on a :

$$\begin{aligned}\forall t\geq 0,\ L_t &= L_0 M(t)\\ &= L_0\left(\big(1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}\big)A^2 + \big((2+\alpha t)e^{-\alpha t}-2\big)A + I_3\right)\\ &= \big(1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}\big)L_0A^2 + \big((2+\alpha t)e^{-\alpha t}-2\big)L_0A + L_0.\end{aligned}$$

Or, $L_0A^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 4 & 1 & -5\\ -20 & 4 & 16\end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}$,

et $L_0A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -4 & 0 & 4\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Ce qui donne en substituant :

$$\begin{aligned}L_t &= \frac{1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}}{9}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix} + \frac{(2+\alpha t)e^{-\alpha t}-2}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \left(\frac{1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}}{9} + \frac{(2+\alpha t)e^{-\alpha t}-2}{3} + 1,\ \frac{-2\left(1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}\right)}{9} - \frac{(2+\alpha t)e^{-\alpha t}-2}{3},\ \frac{1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}}{9}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}P(X_t=1) &= \frac{1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}}{9} + \frac{(2+\alpha t)e^{-\alpha t}-2}{3} + 1\\ &= \frac{1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t} + 3\big((2+\alpha t)e^{-\alpha t}-2\big) + 9}{9}\\ &= \frac{4 + \big(3(2+\alpha t)-(1+\alpha t)\big)e^{-\alpha t}}{9}\\ &= \frac{4+(5+2\alpha t)e^{-\alpha t}}{9}.\end{aligned}$$

De même, on a : $P(X_t=2) = \dfrac{4-(4+\alpha t)e^{-\alpha t}}{9}$

Et $P(X_t=3) = \dfrac{1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}}{9}$.

Partie IV

12)$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$.

$\displaystyle\sum_{j=1}^{3} |a_{1,j}| = \left|\frac{1}{3}\right| + \left|-\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1,$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{3} |a_{2,j}| = |0| + \left|\frac{1}{3}\right| + \left|-\frac{1}{3}\right| = 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{3} |a_{3,j}| = \left|-\frac{4}{3}\right| + |0| + \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{4}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 2.$

On déduit : $||A|| = max\left(1, \dfrac{2}{3}, 2\right) = 2.$

13)Soit $t \geq 0$.

a)Par énoncé, $M(t) = \big(m_{i,j}(t)\big)$ où $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ m_{i,j}(t) = P_{(X_r=i)}(X_{r+t} = j)$, en prenant bien soin de prendre $r \in S_i$, c'est-à-dire $P(X_r = i) \neq 0$, de sorte à bien définir la probabilité conditionnelle.

On sait que c'est possible de trouver un tel réel r, puisque $u \mapsto P(X_u = i)$ n'est pas la fonction nulle, grâce à hypothèse (H_3).

Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on a alors :

$$\sum_{j=1}^{3} |m_{i,j}(t)| = \sum_{j=1}^{3} \left|P_{(X_r=i)}(X_{r+t} = j)\right| = \sum_{j=1}^{3} P_{(X_r=i)}(X_{r+t} = j) = 1$$

car $\big((X_{r+t} = j)_{1 \leq j \leq 3}$ est un système complet.

On déduit : $||A|| = max(1,1,1) = 1.$

b)Posons $G = (\alpha_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $I_n = (\delta_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ avec $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Le coefficient (i,j) de la matrice $I_n + \dfrac{t}{k}G$ est : $\delta_{i,j} + \dfrac{t}{k}\alpha_{i,j}$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \left|\delta_{i,j} + \frac{t}{k}\alpha_{i,j}\right| &= \left|\delta_{i,i} + \frac{t}{k}\alpha_{i,i}\right| + \sum_{j\in[\![1,n]\!], j\neq i} \left|\delta_{i,j} + \frac{t}{k}\alpha_{i,j}\right| \\ &= \left|1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i}\right| + \sum_{j\in[\![1,n]\!], j\neq i} \left|\frac{t}{k}\alpha_{i,j}\right| \quad \text{car } \delta_{i,i} = 0 \text{ et } \delta_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \\ &= \left|1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i}\right| + \sum_{j\in[\![1,n]\!], j\neq i} \frac{t}{k}\alpha_{i,j} \quad \text{car } t \geq 0, k > 0 \text{ et } \alpha_{i,j} \geq 0 \text{ puisque } i \neq j\end{aligned}$$

Comme $\alpha_{i,i} \leq 0$, le signe de $1 + \dfrac{t}{k}\alpha_{i,i}$ est indéterminé.

Mais le fait que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i}\right) = 1$ assure qu'en prenant k assez grand, on aura $1 + \dfrac{t}{k}\alpha_{i,i} \geq 0$ et ainsi $\left|1 + \dfrac{t}{k}\alpha_{i,i}\right| = 1 + \dfrac{t}{k}\alpha_{i,i}$.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \exists k_i \in \mathbf{N}^*, \forall k \geq k_i,\ 1+\dfrac{t}{k}\alpha_{i,i} \geq 0.$

En posant $K = \underset{1\leq i\leq n}{max}\ k_i$, on a alors : $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall k \geq K,\ 1+\dfrac{t}{k}\alpha_{i,i} \geq 0$ donc $\left|1+\dfrac{t}{k}\alpha_{i,i}\right| = 1+\dfrac{t}{k}\alpha_{i,i}$.

En prenant $k \geq K$, on a alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\left|\delta_{i,j}+\frac{t}{k}\alpha_{i,j}\right| &= 1+\frac{t}{k}\alpha_{i,i}+\sum_{j\in[\![1,n]\!],j\neq i}\frac{t}{k}\alpha_{i,j}\\ &= 1+\frac{t}{k}\left(\alpha_{i,i}+\sum_{j\in[\![1,n]\!],j\neq i}\alpha_{i,j}\right)\\ &= 1+\frac{t}{k}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}\\ &= 1 \quad \text{car} \sum_{j=1}^{n}\alpha_{i,j}=0 \text{ d'après la question 2).}\end{aligned}$$

Donc pour k assez grand, $\left|\left|I_n+\dfrac{t}{k}G\right|\right| = 1.$

14)Soient $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

a)$A+B = (a_{i,j}+b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

Pour tout $(,ji) \in [\![1,n]\!]^2$, on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$|a_{i,j}+b_{i,j}| \leq |a_{i,j}|+|b_{i,j}|.$$

En sommant ces inégalités pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a :

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{n}(|a_{i,j}|+|b_{i,j}|)$, c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|+\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}|.$$

Or, par définition, on a $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}| \leq ||A||$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}| \leq ||B||$.

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}| \leq \underbrace{||A||+||B||}_{\text{constante}}$.

On conclut que $\underset{1\leq i\leq n}{max}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}| \leq ||A||+||B||$, c'est-à-dire :

$$||A+B|| \leq ||A||+||B||.$$

b)Par définition du maximum, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $||A|| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$.

Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{i\in[\![1,n]\!],i\neq i_0} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \geq 0$.

Donc $||A|| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| + \sum_{i\in[\![1,n]\!],i\neq i_0} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$, c'est-à-dire :

$$||A|| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

c)• $AB = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ avec $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$.

D'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|c_{i,j}| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left|a_{i,k}b_{k,j}\right|$ ou encore :

$$|c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}|.$$

En sommant ces inégalités pour j allant de 1 à n, on a :

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\left|b_{k,j}\right| \quad (1).$

Or, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\left|b_{k,j}\right| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,k}|\left|b_{k,j}\right| = \sum_{k=1}^{n} \left(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} \left|b_{k,j}\right| \right) \quad (2).$

De plus, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left|b_{k,j}\right| \leq ||B||$, puis $|a_{i,k}| \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left|b_{k,j}\right| \leq |a_{i,k}| ||B||$, ce qui donne en sommant k de 1 à n :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} \left|b_{k,j}\right| \right) \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| ||B|| = ||B|| \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \quad (3).$

Enfin, on a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \leq ||A||$, puis en mutipliant par $||B|| \geq 0$:

$$||B|| \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \leq ||A|| \ ||B|| \quad (4)$$

De (1), (2), (3) et (4), on déduit en recollant les inégalités :

$$||AB|| \leq ||A|| \ ||B||.$$

• Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $||A^k|| \leq ||A||^k$ ».
Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbf{N}$.

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $||A^0|| \leq ||A||^0$ », c'est-à-dire « $||I_n|| \leq 1$ ».
Or, $||I_n|| = 1$ puisque pour chaque ligne, la somme des valeurs absolues des coefficients de I_n fait 1. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Soit $k \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
$||A^{k+1}|| = ||A^k A||$ et $||A^k A|| \leq ||A^k||\ ||A||$ de ce qui précède en prenant $B = A^k$.

$$\text{Donc } ||A^{k+1}|| \leq ||A^k||\ ||A|| \quad (1)$$

De plus, par hypothèse de récurrence, $||A^k|| \leq ||A||^k$.
En multipliant par $||A|| \geq 0$: $||A^k||\ ||A|| \leq ||A||^k\ ||A||$, c'est-à-dire

$$||A^k||\ ||A|| \leq ||A||^{k+1} \quad (2)$$

En recollant (1) et (2), on a : $||A^{k+1}|| \leq ||A||^{k+1}$. Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
On conclut que $\forall k \in \mathbf{N},\ ||A^k|| \leq ||A||^k$.

d)En développant le membre de droite, on a immédiatement :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ A^{k+1} - B^{k+1} = A\left(A^k - B^k\right) + (A-B)B^k.$$

e)Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $\left|\left|A^k - B^k\right|\right| \leq kc^{k-1}||A-B||$ ».
$\mathscr{P}(1)$ s'écrit : « $||A-B|| \leq ||A-B||$ », ce qui est vrai.
Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
$\left|\left|A^{k+1} - B^{k+1}\right|\right| = \left|\left|A\left(A^k - B^k\right) + (A-B)B^k\right|\right| \quad (1).$
Or, d'après la question 14)a), on a :

$$\left|\left|A\left(A^k - B^k\right) + (A-B)B^k\right|\right| \leq \left|\left|A\left(A^k - B^k\right)\right|\right| + \left|\left|(A-B)B^k\right|\right| \quad (2)$$

Puis, la question 14)c) donne :

$$\left|\left|A\left(A^k - B^k\right)\right|\right| \leq ||A||\ \left|\left|A^k - B^k\right|\right| \quad \text{et} \quad \left|\left|(A-B)B^k\right|\right| \leq ||A-B||\ \left|\left|B^k\right|\right|$$

En sommant ces deux inégalités, on a :

$$\left|\left|A\left(A^k - B^k\right)\right|\right| + \left|\left|(A-B)B^k\right|\right| \leq ||A||\ \left|\left|A^k - B^k\right|\right| + ||A-B||\ \left|\left|B^k\right|\right| \quad (3)$$

En recollant (1), (2) et (3), on a :

$$\left|\left|A^{k+1} - B^{k+1}\right|\right| \leq ||A||\ \left|\left|A^k - B^k\right|\right| + ||A-B||\ \left|\left|B^k\right|\right|.$$

Par hypothèse de récurrence, $\left|\left|A^k - B^k\right|\right| \leq kc^{k-1}||A-B||$, puis :

$$||A||\ \left|\left|A^k - B^k\right|\right| \leq ||A||kc^{k-1}||A-B||.$$

D'après 14)c), $\left|\left|B^k\right|\right| \leq ||B||^k$, ce qui donne :

$$||A-B||\ \left|\left|B^k\right|\right| \leq ||A-B||\ ||B||^k.$$

Par somme, on a :

$$||A||\ \left|\left|A^k - B^k\right|\right| + ||A-B||\ \left|\left|B^k\right|\right| \leq ||A||kc^{k-1}||A-B|| + ||A-B||\ ||B||^k \quad (4)$$

En recollant (1), (2), (3) et (4), on a :

$$\left|\left|A^{k+1}-B^{k+1}\right|\right| \leq ||A||kc^{k-1}||A-B|| + ||A-B|| \ \ ||B||^k \quad (5)$$

Enfin, comme $c = max\left(||A||, ||B||\right)$, on a : $||A|| \leq c$ et $||B|| \leq c$.
Ce qui permet d'obtenir :
$||A||kc^{k-1}||A-B|| \leq kc^k||A-B||$ et $||A-B|| \ \ ||B||^k \leq ||A-B||\, c^k$.
En sommant ces inégalités, on a :

$$||A||kc^{k-1}||A-B|| + ||A-B|| \ \ ||B||^k \leq kc^k||A-B|| + ||A-B||\, c^k \quad (6)$$

En recollant (5) et (6), on a :

$$\left|\left|A^{k+1}-B^{k+1}\right|\right| \leq kc^k||A-B|| + ||A-B||\, c^k.$$

c'est-à-dire : $\left|\left|A^{k+1}-B^{k+1}\right|\right| \leq (k+1)c^k||A-B||$. Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
On conclut que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \left|\left|A^{k}-B^{k}\right|\right| \leq kc^{k-1}||A-B||$.

15)Soit $t \geq 0$ et $k \in \mathbf{N}^*$.
a)• Reprenons les notations de la question 13)b) en posant :
$I_n = (\delta_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ avec $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Notons $p_{i,j}$ le coefficient (i,j) de la matrice $M\left(\dfrac{t}{k}\right) - \left(I_n + \dfrac{t}{k}G\right)$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ p_{i,j} = m_{i,j}\left(\dfrac{t}{k}\right) - \delta_{i,j} - \dfrac{t}{k}\alpha_{i,j}$.

Or, $m_{i,j}(h) \underset{h\to 0}{=} \begin{cases} 1 + \alpha_{i,i}h + o(h) & \text{si } i=j \\ \alpha_{i,j}h + o(h) & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{t}{k} = 0$, on déduit :

$$m_{i,j}\left(\frac{t}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \begin{cases} 1 + \alpha_{i,i}\dfrac{t}{k} + o\left(\dfrac{t}{k}\right) & \text{si } i=j \\ \alpha_{i,j}\dfrac{t}{k} + o\left(\dfrac{t}{k}\right) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

D'où, $m_{i,j}\left(\dfrac{t}{k}\right) - \delta_{i,j} - \dfrac{t}{k}\alpha_{i,j} \underset{k\to+\infty}{=} \begin{cases} 1 + \alpha_{i,i}\dfrac{t}{k} + o\left(\dfrac{t}{k}\right) - 1 - \dfrac{t}{k}\alpha_{i,i} & \text{si } i=j \\ \alpha_{i,j}\dfrac{t}{k} + o\left(\dfrac{t}{k}\right) - 0 - \dfrac{t}{k}\alpha_{i,j} & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Finalement, $p_{i,j} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{t}{k}\right)$, ou plus simplement $p_{i,j} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

• Donc $\lim\limits_{k\to+\infty} kp_{i,j} = 0$, entraînant $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|kp_{i,j}\right| = 0$ ou encore $\lim\limits_{k\to+\infty} k\left|p_{i,j}\right| = 0$.

Ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \left|p_{i,j}\right| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

On déduit que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left|p_{i,j}\right| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k}\right)$.

Or, par définition, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\left|\left|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right|\right| = \sum_{j=1}^{n} |p_{i_0,j}|$.

On conclut que $\left|\left|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right|\right| = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)$.

b)La question 13)a) donne : $\left|\left|M\left(\frac{t}{k}\right)\right|\right| = 1$,

Pour k assez grand, la question 13)b) donne : $\left|\left|I_n + \frac{t}{k}G\right|\right| = 1$.

Appliquons la question 14)e) avec $A = M\left(\frac{t}{k}\right)$ et $B = I_n + \frac{t}{k}G$.

$||A|| = 1$ et $||B|| = 1$, puis $c = 1$, ce qui mène à : $\left|\left|A^k - B^k\right|\right| \leq k||A - B||$.

Ainsi, pour k assez grand, on a :

$$\left|\left|M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right|\right| \leq k\left|\left|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right|\right|.$$

c)D'après la question 8)d), on a : $M\left(\frac{t}{k}\right)^k = M\left(\frac{t}{k} \times k\right) = M(t)$.

Des questions 15)a) et 15)b), on déduit alors :

$$\left|\left|M(t) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right|\right| \leq k \times o\left(\frac{1}{k}\right).$$

où $k \times o\left(\frac{1}{k}\right) = k \times \frac{1}{k}\epsilon(k) = \epsilon(k)$ avec $\lim_{k\to+\infty} \epsilon(k) = 0$.

Finalement, on a : $0 \leq \left|\left|M(t) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right|\right| \leq \epsilon(k)$.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim_{k\to+\infty} \left|\left|M(t) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right|\right| = 0$, ce qui prouve que

$$\lim_{k\to+\infty} \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k = M(t).$$