DM3 cubes
à rendre le lundi / /

Exercice 1

Partie I : un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0{}^tV_0$.

1)Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer le sous-espace propre associé.

2)Calculer A_0U_0. Conclure que A_0 est diagonalisable.

Partie II : généralisation

Soient $U = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ et $V = (v_i)_{1\leq i\leq n}$ deux matrices colonnes non-nulles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, où $n \geq 2$ désigne un entier.
On pose $A = U{}^tV$ et on note θ la trace de A.

1)Vérifier que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, puis calculer ses coefficients.

2)Quel est le rang de A ? Calculer θ à l'aide des coefficients de U et V.

3)Montrer que $AU = \theta U$.

4)A l'aide des questions précédentes, montrer que si $\theta \neq 0$, A est diagonalisable.

Exercice 2

On définit la fonction H de la variable x par : $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t$.
On admettra que $H(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Partie I : premières propriétés de la fonction H

1)Justifier que H est définie et décroissante sur $]1/2, +\infty[$.

2)Al'aide d'une IPP, montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^* : H(n) = 2n\big(H(n) - H(n+1)\big)$.
En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et $H(n)$.

3)Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}^* : H(n) = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}$.

Partie II : étude de $H(x)$ quand x tend vers $1/2$

4)a)Montrer que la fonction $\varphi : u \to \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \varphi^{-1}(t)$.

b)En posant $t = \varphi(u)$, montrer que $\forall x > \frac{1}{2}, H(x) = \dfrac{4^x}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}}\mathrm{d}u$.

5)a)Justifier que $\forall u \geq 0 : e^u \leq e^u + e^{-u} \leq 2e^u$.

b)En déduire que $\forall x > 1/2, \dfrac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \dfrac{4^x}{2(2x-1)}$. Trouver $\displaystyle\lim_{x\to(1/2)^+} H(x)$.

6)Trouver un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $(1/2)^+$.