Correction DM9

Exercice 1

1)f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ comme inverse d'une fonction C^2 ne s'annulant pas et $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

$\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) = \dfrac{-2\left(1+x^2\right)^2 - 2(2x)\left(1+x^2\right)(-2x)}{\left(1+x^2\right)^4} = \dfrac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$.

$f''(x)$ est du signe de $6x^2-2$, de racines $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, d'où le tableau de variations :

x	0		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	0

$1+x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ donc $\left(1+x^2\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} x^4$, puis $f'(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-2}{x^3}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x^3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

De plus, $f'\left(1/\sqrt{3}\right) = \dfrac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Le tableau de variations donne $\forall x \geq 0,\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{8} \leq f'(x) \leq 0$, puis $\left|f'(x)\right| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

2)• g est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ comme différence de fonctions dérivables et
$\forall x \geq 0,\ g'(x) = f'(x) - 1$.

$\forall x \geq 0,\ f'(x) \leq 0$ donc $g'(x) \leq -1 < 0$.
Donc g est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

• g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$, elle réalise donc une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $g\left(\mathbf{R}_+\right) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), \lim\limits_{x\to0^+} g(x)\right] =]-\infty, 1]$.

$0 \in]-\infty, 1]$ admet donc un unique antécédent α par g.
Aussi, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \geq 0$.

• De plus, $g(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = x$.
Donc l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \geq 0$.

• Enfin, $g(0,6) = f(0,6) - 0,6 > 0$, $g(\alpha) = 0$ et $g(0,7) = f(0,7) - 0,7 < 0$.
Donc $g(0,7) < g(\alpha) < g(0,6)$, puis $0,6 < \alpha < 0,7$ par stricte décroissance de g.

3)$\forall n \in \mathbf{N},\ U_{n+1} = f(U_n) = \dfrac{1}{1+U_n^2} \geq 0$. Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ U_n \geq 0$.

De plus, $U_0 \geq 0$ par énoncé. Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \geq 0$.

4)f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \geq 0,\ |f'(x)| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.
D'après l'inégalité des acrroissements finis, quels que soient les réels a et b de $\mathbf{R}_+$:

$|f(b) - f(a)| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}|b-a|$.

Prenons $a = \alpha$ et $b = U_n$. Ce choix est légitime puisque a et U_n sont dans $\mathbf{R}_+$.

On obtient alors : $|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}|U_n - \alpha|$.
Or, $f(\alpha) = \alpha$ et $f(U_n) = U_{n+1}$.

Finalement, $\forall n \in \mathbf{N},\ |U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}|U_n - \alpha|$.

5)• Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |U_0 - \alpha|$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $|U_0 - \alpha| \leq |U_0 - \alpha|$ », ce qui est vrai.
Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

La question 4) donne : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}|U_n - \alpha| \quad (*)$

L'hypothèse de récurrence donne : $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |U_0 - \alpha|$, puis en multipliant membre à membre par $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$:

$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha| \quad (**)$

En recollant $(*)$ et $(**)$, on déduit : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ |U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |U_0 - \alpha|$.

• On a aussi $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq |U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |U_0 - \alpha|$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{3\sqrt{3}}{8} < 1$ et $|U_0 - \alpha|$ est une constante.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |U_0 - \alpha| = 0$.

D'après la propriété des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n - \alpha| = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} d(U_n, \alpha) = 0$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$.

Exercice 2 (extrait edhec 2014)

1)La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbf{R}$ par composée et inverse de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Elle admet donc une primitive sur $\mathbf{R}$, ce qui donne un sens à l'intégrale.
Donc φ est bien définie sur $\mathbf{R}$.

2)$\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$

$$= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}}(-du) \quad \text{en posant } u = -t$$
$$= -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du$$
$$= -\varphi(x).$$

Donc φ est impaire.

3)Notons F une primitive de f sur $\mathbf{R}$.
$\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi(x) = \left[F(t)\right]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$.
F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R},\ F'(x) = f(x)$.
f étant continue sur $\mathbf{R}$, F' l'est aussi.
Ainsi, F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.
φ est alors de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ par composée et différence de fonctions C^1.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi'(x) = 2F'(2x) - F'(x)$$
$$= 2f(2x) - f(x)$$
$$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}\sqrt{x^2+1}}.$$

4)a)Les inégalités $\forall t \geq 0,\ t^2 \leq t^2+1 \leq (t+1)^2$ donnent :
$\sqrt{t^2} \leq \sqrt{t^2+1} \leq \sqrt{(t+1)^2}$, par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbf{R}_+$,
c'est-à-dire $t \leq \sqrt{t^2+1} \leq t+1$,
puis $\dfrac{1}{t+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \dfrac{1}{t}$ par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

En intégrant ces inégalités entre les bornes croissantes[1] x et $2x$, on obtient :
$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$$
$$\left[\ln(t+1)\right]_x^{2x} \leq \varphi(x) \leq \left[\ln(t)\right]_x^{2x}$$
$$\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq \varphi(x) \leq \ln(2x) - \ln(x).$$

Donc $\forall x > 0,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq \varphi(x) \leq \ln 2$.

1. car $x > 0$

4)b)$\forall x > 0,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = \ln\left(\dfrac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = \ln\left(\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 2$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln 2$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+1)) = \ln 2$.

La question 4)a) donne alors grâce à la propriété des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \ln 2$.

$$\begin{aligned}
4)c)\varphi'(x) > 0 &\iff 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{4x^2+1} > 0 \\
&\iff 2\sqrt{x^2+1} > \sqrt{4x^2+1} \\
&\iff \left(2\sqrt{x^2+1}\right)^2 > \left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2 \quad \text{par croissance de } t \mapsto t^2 \text{ sur } \mathbf{R}_+ \\
&\iff 4(x^2+1) > 4x^2+1 \\
&\iff 4 > 1.
\end{aligned}$$

ce qui est vrai donc $\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi'(x) > 0$.

φ est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\ln 2$ car φ est impaire et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \ln 2$.

D'où le tableau de variations de φ :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\varphi(x)$	$-\ln 2$	$\nearrow$	$\ln 2$

4)d)φ est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\varphi(\mathbf{R}) = [-\ln 2, \ln 2]$.
$0 \in [-\ln 2, \ln 2]$ admet donc un unique antécédent par φ.
Donc φ s'annule une et une seule fois.

Or, $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt = 0$.

Donc l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ est $x = 0$.