Exercice 1 (eml 2014)

Partie I

1)φ est de classe C^3 sur $]0,+\infty[$ comme différence, produit et composée de fonctions de classe C^3.

Pour tout $x>0$, on a :

$\varphi'(x)=e^x-\left(1\times e^{\frac{1}{x}}+x\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}\right)=e^x+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}}$.

$\varphi''(x)=e^x-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\times\left(-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)=e^x-\dfrac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$.

$\varphi'''(x)=e^x-\left(-\dfrac{3}{x^4}e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^3}\times\left(-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\right)=e^x+\dfrac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$.

2)$\forall x>0,\ e^x>0,\ 3x+1>0,\ x^5>0$ et $e^{\frac{1}{x}}>0$ donc $\varphi'''(x)>0$.
Donc φ'' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$\varphi''(1)=e^1-\dfrac{1}{1}e^1=0$.

φ'' est croissante sur $]0,+\infty[$ et s'annule en 1. Donc $\forall x\in]0,1],\ \varphi''(x)\leq 0$ et $\forall x\in[1,+\infty[,\ \varphi''(x)\geq 0$.

φ' est donc décroissante sur $[0,1[$, puis croissante sur $[1,+\infty[$. Elle admet donc un minimum en 1 dont la valeur est $\varphi'(1)=e$.

Donc $\forall x>0,\ \varphi'(x)\geq e$.

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}xe^{\frac{1}{x}}$ est une forme indéterminée du type « $0\times+\infty$ » qu'on lève en effectuant le changement de variable $t=\dfrac{1}{x}$, ou ce qui est équivalent $x=\dfrac{1}{t}$.

Quand $x\to 0^+$, alors $t\to+\infty$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to 0^+}xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}\times e^t=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ par croissances comparées.

Par différence, $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=-\infty$.

4)$\forall x>0,\ \dfrac{\varphi(x)}{x}=\dfrac{e^x}{x}-e^{\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ par croissances comparées.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{u\to 0}e^u=1$. Par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$.

Par différence, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}=+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

5)φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0,\ \varphi'(x) \geq e$.
D'après l'inégalité des acrroissements finis, pour tout couple (a, b) de réels strictement positifs tels que $a \leq b$, on a :

$$\varphi(b) - \varphi(a) \geq e(b - a).$$

En prenant $a = 3$ et $b = x \geq 3$, on obtient :

$\varphi(x) - \varphi(3) \geq e(x - 3)$, c'est-à-dire : $\varphi(x) \geq ex + \varphi(3) - 3e \quad (*)$

Enfin, par énoncé, on a : $\varphi(3) > 15$ et $e < 3$ donc $\varphi(3) - 3e > 15 - 9 = 6 > 0$.

De $(*)$, on tire : $\forall x \geq 3,\ \varphi(x) \geq ex$.

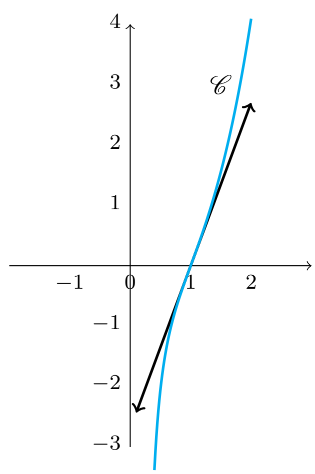
6)On a vu dans la question 2) que φ'' s'annule une seule fois en 1 et qu'elle change de signe en 1.
Donc $\mathscr{C}$ possède un unique point d'inflexion I dont l'abscisse est 1.
Son ordonnée est $\varphi(1) = 0$. Ainsi, $I(1, 0)$.

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'inflexion est : $y = \varphi'(1)(x - 1) + \varphi(1)$, c'est-à-dire $y = e(x - 1)$.

7)D'après la question 2), on a $\forall x > 0,\ \varphi'(x) \geq e > 0$ donc φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, d'où le tableau de variations de φ :

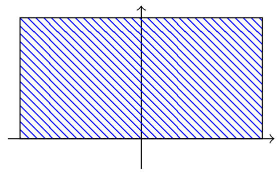
x	0	1	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty$ donc $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.



Partie II

8)U est le demi-plan d'ordonnées positives (partie hachurée).



9)$(x,y) \mapsto xy$ est polynomiale donc de classe C^2 sur U.
$(x,y) \mapsto e^x$ et $(x,y) \mapsto \ln y$ sont des fonctions usuelles donc de classe C^2 sur U.
Par produit, $(x,y) \mapsto e^x \ln y$ est de classe C^2 sur U.
Par différence, f est de classe C^2 sur U.

Pour tout couple $(x,y) \in U^2$, on a :

$\partial_1 f(x,y) = y - e^x \ln y$ et $\partial_2 f(x,y) = x - \dfrac{e^x}{y}$.

$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \partial_1 \left(y - e^x \ln y\right) = -e^x \ln y$,

$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial_1 \left(x - \dfrac{e^x}{y}\right) = 1 - \dfrac{e^x}{y}$,

$\partial^2_{2,1} f(x,y) = \partial_2 \left(y - e^x \ln y\right) = 1 - \dfrac{e^x}{y}$,

$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \partial_2 \left(x - \dfrac{e^x}{y}\right) = \dfrac{e^x}{y^2}$.

10)Soit $(x,y) \in U$.

(x,y) est un point critique de f

$\iff \begin{cases} \partial_1 f(x,y) & = 0 \\ \partial_2 f(x,y) & = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y - e^x \ln y & = 0 \\ x - \dfrac{e^x}{y} & = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y - e^x \ln y = 0 \\ x = \dfrac{e^x}{y} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y - xy \ln y = 0 \\ e^x = xy \end{cases}$

Or, $e^x > 0$ et $y > 0$ puisque $y \in U$. La deuxième équation donne alors : $x > 0$.

Transformons la première équation :

$$\begin{aligned} y - xy\ln y = 0 &\iff y\left(1 - x\ln y\right) = 0 \\ &\iff 1 - x\ln y = 0 \quad \text{car } y \neq 0 \\ &\iff \ln y = \frac{1}{x} \\ &\iff y = e^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Le système est alors équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{l} y = e^{\frac{1}{x}} \\ e^x = xy \text{ et } x > 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = e^{\frac{1}{x}} \\ e^x = xe^{\frac{1}{x}} \text{ et } x > 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = e^{\frac{1}{x}} \\ \varphi(x) = 0 \text{ et } x > 0 \end{array}\right.$$

11)φ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbf{R}$. L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc une unique solution, qui est 1 car $\varphi(1) = 0$.
Ainsi, $\varphi(x) = 0$ et $x > 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

En reportant la valeur $x = 1$ dans le système de la question 10), on obtient $y = e$.

Ainsi, $(1, e)$ est l'unique point critique de f.

12)La matrice hessienne de f en $(1, e)$ est :

$$\begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(1,e) & \partial^2_{1,2} f(1,e) \\ \partial^2_{2,1} f(1,e) & \partial^2_{2,2} f(1,e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{e} \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice diagonale. Ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, ce sont donc $-e$ et $\dfrac{1}{e}$.

Elles sont non nulles et de signes contraires donc f n'admet pas d'extrémum local en $(1, e)$ (c'est un col).

13)f est de classe C^1 sur **l'ouvert** U. Donc les points de U où f est susceptible d'avoir un extrémum local sont ses points critiques. Or, le seul point critique de f est $(1, e)$ et on a vu que f n'avait pas d'extrémum local en $(1, e)$.
Donc f n'a pas d'extrémum local sur U.

Partie III

14)Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « u_n existe et $u_n \geq 3e^n$ ».
Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « u_0 existe et $u_0 \geq 3$ ». C'est vrai puisque $u_0 = 3$ par énoncé.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geq 3e^n > 0$. Comme φ est définie sur $]0, +\infty[$, on est sûr que $\varphi(u_n)$, c'est-à-dire u_{n+1} existe.

De plus, par croissance de φ sur $]0, +\infty[$, on a : $\varphi(u_n) \geq \varphi(3e^n) \quad (1)$

En remarquant que $3e^n \geq 3$, il est maintenant possible d'utiliser la question 5) avec $x \to 3e^n$, ce qui donne :
$\varphi(3e^n) \geq e \times 3e^n$, c'est-à-dire $\varphi(3e^n) \geq 3e^{n+1} \quad (2)$

En recollant (1) et (2), on déduit : $\varphi(u_n) \geq 3e^{n+1}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq 3e^{n+1}$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n$ existe et $u_n \geq 3e^n$.

15)• Comme $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq 3e^n \geq 3$, on peut de nouveau utiliser la question 5) avec $x \to u_n$, ce qui donne :

$\varphi(u_n) \geq eu_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq eu_n \geq u_n$.
Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

• $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geq 3e^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3e^n = +\infty$.

Par passage à la limite, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

16)programme :

```
import numpy as np
u=3
n=0
while u<10**3:
    u=np.exp(u)-u*np.exp(1/u)
    n=n+1
print(n)
```

17)De la question 14), on déduit : $\forall n \in \mathbf{N},\ \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{3e^n} = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$.

La série $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ converge comme série géométrique de paramètre $1/e \in]-1,1[$.

La série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ également puisqu'elle a même nature.

D'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{u_n}$ converge.

Exercice 2 (eml 2014)

1)$\epsilon = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$

$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$

$= \mathrm{Vect}\,(A,B,C)$.

Donc ϵ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ donc un espace vectoriel.

De plus, (A,B,C) est une famille génératrice de ϵ.

Enfin, pour tous réeels a, b et c, on a :

$aA + bB + cC = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = b = c = 0.$

Donc (A,B,C) est libre.

(A,B,C) est une famille libre et génératrice de ϵ donc une base de ϵ.

2)Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ deux matrices quelconques de ϵ.

Alors, $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in \epsilon.$

3)Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \epsilon$. Supposons M inversible.

Comme M est triangulaire et inversible, ses coefficients a et c sont non nuls.

Cherchons M^{-1} à l'aide de la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \to cL_1 - bL_2 \\ L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & -b/(ac) \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \to (1/ac)L_1 \\ L_2 \to (1/c)L_2 \end{matrix}$$

Donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/(ac) \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} \in \epsilon.$

4)$T \in \epsilon$ donc $\forall M \in \epsilon,\ TMT \in \epsilon$ par stabilité de ϵ par multiplication.
Donc f est ≪ endo ≫.

De plus, pour toutes matrices M et N de ϵ, pour tout réel λ, on a :

$f(\lambda M + N) = T(\lambda M + N)T = (T\lambda M + TN)T = \lambda TMT + TNT = \lambda f(M) + f(N).$

Donc f est un endomorphisme de ϵ.

5)T est triangulaire et ses éléments diagonaux sont non nuls. Donc T est inversible.

$$\begin{aligned} \forall M \in \epsilon,\ f(M) = 0 &\Longleftrightarrow TMT = 0 \\ &\Longleftrightarrow T^{-1}TMTT^{-1} = T^{-1}0T^{-1} \\ &\Longleftrightarrow IMI = 0 \\ &\Longleftrightarrow M = 0. \end{aligned}$$

Donc $Kerf = \{0\}$, ce qui prouve que f est injective.

f est un endomorphisme injectif, il est donc bijectif.
En conséquence, c'est un automorphisme de ϵ.

6)Supposons T diagonalisable.
Alors, il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $T = PDP^{-1}$.
D porte en diagonale les valeurs propres de T, à savoir 1. Donc $D = I$.
On obtient alors : $T = PIP^{-1} = I$, ce qui est absurde.

Donc T n'est pas diagonalisable.

7)$f(A) = TAT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$f(B) = TBT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$f(C) = TCT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On constate que $f(A) = A + B$, $f(B) = B$ et $f(C) = B + C$.

On déduit $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8)• Cherchons les valeurs propres de F.

Pour tout réel λ, transformons $F - \lambda I$ en une matrice triangulaire.

$$F - \lambda I = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ L_2 \longleftrightarrow L_1 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & (1-\lambda)^2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow (1-\lambda)L_1 - L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } F &\iff F - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff (1-\lambda)^2 = 0 \text{ ou } 1 - \lambda = 0 \\ &\iff \lambda = 1. \end{aligned}$$

Donc $sp(f) = sp(F) = \{1\}$.

• $E_1(F) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R}) \mid (F - I)U = 0\}$.

Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$U \in E_1(F) \iff (F - I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff x + z = 0 \iff x = -z$.

$$\text{Donc } E_1(F) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -z \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$
$$= \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$
$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Il faut enfin revenir à $E_1(f)$.
$E_1(f) = \text{Vect}\,(U,V)$ où les vecteurs colonnes de U et V dans la base (A,B,C) sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On a donc $U = 0A + 1B + 0C = B$ et $V = -1A + 0B + 1C = -A + C$.
Ainsi, $E_1(f) = \text{Vect}\,(B, -A + C)$.

$(B, -A + C)$ est une famille génératrice de $E_1(f)$ et elle est libre car les matrices B et $-A + C$ ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $E_1(f)$.

9)f est un endomorphisme de ϵ et $dim(\epsilon) = 3$ grâce à la question 1).
Le seul sous-espace propre de f est $E_1(f)$ qui est de dimension $2 < dim(\epsilon)$.
Donc f n'est pas diagonalisable, d'après le théorème de réduction.

10)Comme $\lambda \neq 1$, alors λ n'est pas valeur propre de f.
Donc $f - \lambda \text{id}_\epsilon$ est bijective.
Ainsi, $\forall M \in \epsilon,\ f(M) = \lambda M \iff (f - \lambda \text{id}_\epsilon)(M) = 0 \iff M = 0$.

11)$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $a \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a par la formule du binôme :
$$(I + aH)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} I^{n-k}(aH)^k \quad \text{formule valide car } I \text{ et } aH \text{ commutent}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} I a^k H^k$$
$$= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} I a^0 H^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} I a^1 H^1 \quad \text{car } \forall k \geq 2,\ H^k = 0$$
$$= I + naH.$$

12)On remarque que $F = I + H$, ce qui permet d'appliquer la question 11) avec $a = 1$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ F^n = I + nH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13)•En appliquant la question 11) avec $a = \dfrac{1}{3}$ et $n = 3$, on obtient :

$\left(I + \dfrac{1}{3}H\right)^3 = I + 3 \times \dfrac{1}{3}H = I + H = F.$

Donc $G = I + \dfrac{1}{3}H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

• Soit g l'endomorphisme de ϵ dont la matrice dans la base (A, B, C) est G.
Les matrices de g^3 et de f dans la base (A, B, C) sont respectivement G^3 et F.
Comme $G^3 = F$, on a donc $g^3 = f$, c'est-à-dire $g \circ g \circ g = f$.

Exercice 3 (eml 2014)

Partie I

1)a)L'événement $(X_3 = 4)$ est réalisé si et seulement si les numéros des boules sont successivement : 3, 2 et 1, le quatrième numéro étant quelconque.

Donc $(X_3 = 4) = (N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)$.

On déduit :

$$\begin{aligned} P(X_3 = 4) &= P\left((N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)\right) \\ &= P(N_1 = 3)P(N_2 = 2)P(N_3 = 1) \qquad \text{par indépendance des tirages} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

✓ L'indépendance des tirages est dûe à la remise de la boule.

b)L'événement $(X_3 = 2)$ est réalisé si et seulement si la deuxième boule tirée a un numéro supérieur ou égal à la première.

Donc $(X_3 = 2) = (N_1 = 1) \cup \big((N_1 = 2) \cap (N_2 \geq 2)\big) \cup \big((N_1 = 3) \cap (N_2 = 3)\big)$.

On déduit par incompatibilité des événements :

$P(X_3 = 2) = P(N_1 = 1) + P\big((N_1 = 2) \cap (N_2 \geq 2)\big) + P\big((N_1 = 3) \cap (N_2 = 3)\big)$.

Puis, par indépendance :

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2) &= P(N_1 = 1) + P(N_1 = 2)P(N_2 \geq 2) + P(N_1 = 3)P(N_2 = 3) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Comme $X_3(\Omega) = \{2, 3, 4\}$, on déduit :

$P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 2) - P(X_3 = 4) = 1 - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{27} = \dfrac{8}{27}$.

2)X_3 est discrète finie donc admet une espérance donnée par :

$$E(X_3) = \sum_{k=2}^{4} kP(X_3 = k) = 2P(X_3 = 2) + 3P(X_3 = 3) + 4P(X_3 = 4)$$

$$= 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{8}{27} + 4 \times \frac{1}{27} = \frac{64}{27}.$$

Partie II

3)$\forall k \in [\![1, n+1]\!], \forall j \in [\![1, n]\!],\ P(N_k = j) = \dfrac{1}{n}$. Donc $N_k \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1, n]\!]\big)$.

Le cours donne $E(N_k) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(N_k) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

4)L'événement $(X_n = n + 1)$ est réalisé si et seulement si les n premierès boules tirées amènent la suite strictement décroissante de numéros : $n, n-1, \cdots, 2, 1$.
La $n+1$-ème boule peut amener n'importe quel résultat.

On a donc :

$P(X_n = n + 1) = P\big((N_1 = n) \cap (N_2 = n - 1) \cap ... \cap (N_{n-1} = 2) \cap (N_n = 1)\big)$.

Par indépendance, on déduit :

$$\begin{aligned}P(X_n = n+1) &= P(N_1 = n)P(N_2 = n-1)\cdots P(N_{n-1} = 2)P(N_n = 1)\\ &= \frac{1}{n}\times\cdots\times\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n^n}.\end{aligned}$$

5)Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Supposons $(N_1 = i)$ réalisé.
Pour réaliser l'événement $(X_n = 2)$, il faut que le deuxième tirage amène une boule dont le numéro est supérieur ou égal à i.

Il y a $n - (i-1) = n - i + 1$ tels numéros.

Donc $P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \dfrac{n-i+1}{n}$.

6)La formule des probabilités totales pour le sce $(N_1 = i)_{1\leq i\leq n}$ donne :

$$\begin{aligned}P(X_n = 2) &= \sum_{i=1}^{n} P\big((X_n = 2)\cap(N_1 = i)\big)\\ &= \sum_{i=1}^{n} P_{(N_1=i)}(X_n = 2)P(N_1 = i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{n-i+1}{n}\times\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} n-i+1\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \quad \text{en posant } k = n-i+1\\ &= \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

7)L'événement $(X_n > k)$ est réalisé si et seulement si les k premières boules tirées portent des numéros rangés dans l'ordre strictement décroissant.

Donc $\forall k \in [\![2, n]\!],\ (X_n > k) = (N_1 > N_2 > \cdots > N_k)$.

Pour construire une suite strictement décroissante de k numéros, il faut commencer par en choisir k distincts parmi n, il y a $\binom{n}{k}$ choix.
Puis, ces numéros étant choisis, il faut les ordonner du plus grand au plus petit, ce qu'on peut faire d'une seule façon.
Il y a donc $\binom{n}{k}\times 1 = \binom{n}{k}$ suites strictement décroissante de k numéros.

Le nombre total de suites de k numéros est n^k, puisque chacun des k numéros a n possibilités (on multiplie ces possibilités, c'est le principe de l'arbre).

Donc $\forall k \in [\![2, n]\!],\ P(X_n > k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} = \dfrac{1}{n^k}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Pour $k = 0$, on a : $\dfrac{1}{n^k}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{1}{n^0}\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1 = P(X_n > 0)$
car $X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

Pour $k=1$, on a : $\dfrac{1}{n^k}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \dfrac{1}{n^1}\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right) = 1 = P(X_n > 1)$
car $X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

8)X_n est un entier donc $\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ X_n > k-1 \Longleftrightarrow X_n = k$ ou $X_n > k$.

On déduit :

$$\begin{aligned} P(X_n > k-1) &= P\big((X_n = k) \cup (X_n > k)\big) \\ &= P(X_n = k) + P(X_n > k) \quad \text{par incompatibilité.} \end{aligned}$$

Donc $P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k)$.

9)X_n est discrète finie donc admet une espérance donnée par :

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} k\big(P(X_n > k-1) - P(X_n > k)\big)$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \big(kP(X_n > k-1) - kP(X_n > k)\big)$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \big(kP(X_n > k-1) - (k+1)P(X_n > k) + P(X_n > k)\big)$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \big(kP(X_n > k-1) - (k+1)P(X_n > k)\big) + \sum_{k=2}^{n+1} P(X_n > k)$$

$$= 2P(X_n > 1) - (n+2)P(X_n > n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} P(X_n > k) \quad (*) \text{ par télescopage.}$$

Comme $X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$, $P(X_n > 0) = P(X_n > 1) = 1$ et $P(X_n > n+1) = 0$.
On a donc $2P(X_n > 1) = P(X_n > 0) + P(X_n > 1)$.

Enfin, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} P(X_n > k) = \sum_{k=2}^{n} P(X_n > k) + P(X_n > n+1) = \sum_{k=2}^{n} P(X_n > k)$.

En reportant dans $(*)$, on obtient :

$$E(X_n) = P(X_n > 0) + P(X_n > 1) + \sum_{k=2}^{n} P(X_n > k) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n > k).$$

Compte tenu de la question 7), on a alors :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{par la formule du binôme.} \end{aligned}$$

10)$\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k)$

$$= \frac{1}{n^{k-1}} \binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$$
$$= \frac{1}{n^k} \left(n \binom{n}{k-1} - \binom{n}{k} \right)$$
$$= \frac{1}{n^k} \left(\frac{n \times n!}{(n-k+1)!(k-1)!} - \frac{n!}{(n-k)!k!} \right)$$
$$= \frac{1}{n^k} \times \frac{n \times n! \times k - n!(n-k+1)}{(n-k+1)!k!}$$
$$= \frac{n!\big(nk - (n-k+1)\big)}{n^k (n-k+1)!k!}$$
$$= \frac{n!(n+1)(k-1)}{n^k (n-k+1)!k!}$$
$$= \frac{(n+1)!(k-1)}{n^k (n+1-k)!k!}$$
$$= \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}.$$

Partie III

11)Soit $k \geq 2$ un entier.
$\forall n \geq k-1,\ \binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n+2-k)}{k!}$.
Le numérateur comporte k facteurs tous équivalents à n quand $n \to +\infty$ (puisque k fixé, est considéré comme une constante).
Donc le numérateur est équivalent à n^k quand $n \to +\infty$.
Ainsi, $\binom{n+1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$, d'où $P(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{k-1}{k!}$.

Ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$.

12)$\forall n \geq 2,\ \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{n!}$ par télescopage.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = 1$, ce qui prouve que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et que sa somme fait 1.

13)• Z admet une espérance si la série $\sum_{k \geq 2} kP(Z = k)$ est absolument convergente.
Comme c'est une série à termes positifs, il suffit de montrer la convergence simple.
$\forall n \geq 2,\ \sum_{k=2}^{n} kP(Z = k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!}$ (poser $j = k-2$).
On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique de paramètre 1. Elle converge vers $e^1 = e$.

Ainsi, $E(Z)=\sum_{k=2}^{+\infty} kP(Z=k)=e$.

• $\forall n\geq 2,\ E(X_n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\exp\big(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\big)$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\ln(1+x)\underset{0}{\sim} x$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$.

Enfin, $\lim_{x\to 1} e^x=e$.

Par composition, $\lim_{n\to+\infty}\exp\big(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\big)=1$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} E(X_n)=e=E(Z)$.