ECRICOME 2009

1 EXERCICE.

A tout triplet (a,b,c) de réels, on associe la matrice $M(a,b,c)$ définie par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Soit $E = \{M(a,b,c) \text{ avec } a,b,c \text{ réels}\}$.

1.1 Recherche d'une base de E.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

1.2 Cas particulier de la matrice $M(1,2,3)$.

1. Donner les valeurs propres de $M(1,2,3)$.
2. Déterminer $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que :
$$D = P^{-1} M(1,2,3) P$$
3. Donner l'expression de P^{-1}. En déduire la matrice $[M(1,2,3)]^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Cas particulier de la matrice $M(1,1,1)$

On pose $J = M(1,1,1) - I_3$, la matrice I_3 représentant la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer les matrices J^2, J^3. En déduire l'expression de J^n, pour tout entier $n \geq 3$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$:
$$[M(1,1,1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$
L'écriture obtenue est-elle encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$?
3. En déduire l'écriture matricielle de $[M(1,1,1)]^n$.

1.4 Cas particulier de la matrice $M(1,1,2)$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M(1,1,2)$.
On définit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ par : $\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (0,1,0)$, $\vec{w} = (2,1,1)$.

1. Démontrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{w})$.
3. Exprimer $f(\vec{v})$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En déduire la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

5. Montrer que la matrice de passage R de la base canonique à la base $\mathcal{C}$ a pour matrice inverse :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Donner une relation reliant les matrices $M(1,1,2)$, Q, R et T.
7. Sans l'expliciter, écrire $[M(1,1,2)]^n$ en fonction de $n,\ Q,\ R,\ T$.

2 EXERCICE.

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x,y) \in \left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[, \quad f(x,y) = e^{x+4y}\ln(xy)$$

2.1 Etude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$, déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer l'existence de deux réels α et β tels que :

$$0 < \alpha < \beta \text{ et } \varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$

6. Proposer un programme Python affichant une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

2.2 Extrema de f sur $\left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x, et y strictement positifs

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = f(x,y) + \dfrac{1}{x} \times e^{x+4y} \\ \\ \partial_2 f(x,y) = 4f(x,y) + \dfrac{1}{y} \times e^{x+4y} \end{cases}$$

3. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $\left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[$.
4. Calculer les dérivées partielles secondes sur $\left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[$ et établir que :

$$\begin{cases} \partial^2_{1,1} f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\ \\ \partial^2_{2,2} f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 16\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\ \\ \partial^2_{1,2} f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \partial^2_{2,1} f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{4}{\alpha}e^{2\alpha} \end{cases}$$

5. La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $\left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[$ au point de coordonnées $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$? Si oui, en donner sa nature (maximum on minimum)
6. f présente-t-elle un extremum local sur $\left]0,+\infty\right[\times \left]0,+\infty\right[$ au point de coordonnées $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$?

3 EXERCICE.

3.1 Préliminaire.

Soient x un réel dans l'intervalle $[0,1[$, n un entier naturel non nul et S_n la fonction définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

1. Calculer la somme $S_n(x)$.
2. Dériver l'égalité obtenue et montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Une municipalité a lancé une étude concernant les problèmes liés au transport.

3.2 Partie 1.

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0.8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

1. Déterminer la valeur de σ en utilisant la table jointe en annexe.
2. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?
3. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ? (On exprimera cette probabilité à l'aide de $\Phi(1)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite).
4. Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.
   a) On désigne par Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de jours où Monsieur Thierex a attendu moins de 7 minutes.
   Déterminer la loi de Y, donner sans calcul, son espérance et sa variance.
   b) On définit par Z la variable aléatoire discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.
   Déterminer en fonction de p la probabilité des événements $[Z = 0]$, puis $[Z = k]$ pour $1 \leq k \leq 10$.
   Utiliser le préliminaire pour calculer l'espérance de Z en fonction de p.
5. Lassé des retards de son bus, Monsieur Thurman décide de prendre le bus ou le métro selon le protocole suivant :
   — Le premier jour, il prend le bus.
   — Si le jour n ($n \in \mathbb{N}^*$) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n+1$ il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.
   — Si le jour n il prend le métro, le jour $n+1$ il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.

On note p_n la probabilité de l'événement $A_n =$" Monsieur Thurman prend le bus le jour n"

a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \left(p - \frac{1}{2}\right) p_n + \frac{1}{2}$$

b) Soit α le réel vérifiant :

$$\alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right) \alpha + \frac{1}{2}$$

Déterminer α en fonction de p, puis montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} (1 - \alpha) + \alpha$$

c) La suite (p_n) est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

3.3 Partie 2.

1. Soit λ une constante strictement positive.
Une origine de temps étant choisie, on note Y_t le nombre d'appels reçus par le standard d'une société de taxis entre les instants 0 et t.
On suppose que Y_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.
On note T la variable aléatoire représentant l'instant où un premier appel est effectué vers ce standard. Par convention $\forall t < 0,\ \mathrm{P}(T \leq t) = 0$.

   a) Pour tout entier naturel k, rappeler la valeur de la probabilité de l'événement $[Yt = k]$, ainsi que l'espérance et la variance de Y_t.

   b) Que peut-on dire des événements $[Y_t = 0]$ et $[T > t]$ pour $t > 0$?
   En déduire la probabilité des événements $[T > t]$ et $[T \leq t]$ pour $t > 0$.

   c) Expliciter la fonction de répartition F_T de T. Reconnaître la loi de T et donner son espérance et sa variance.

2. La durée, exprimée en heures, du transport d'un client par la société est une variable aléatoire U à densité dont une densité est donnée par :

$$\begin{cases} g(t) = t\, e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ g(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

   a) Vérifier que g est bien une densité de probabilité.

   b) Montrer que U admet une espérance que l'on déterminera. Que représente cette espérance ?

Annexe : Table

La table ci-dessous comporte les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, à savoir les valeurs de :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

par exemple $\Phi(0,67) = 0,7486$

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817