réécrit en Python par Nicolas Damien

ECRICOME 2021 Voie E

Lundi 19 avril 2021 de 8h00 à 12h00

EXERCICE 1 (Original modifié !)

Soit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E.
Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalite :

$$M\,(M+I_3)\,(M+2I_3) = 0_3 \qquad (*)$$

Partie A : Exemples de matrices appartenant à $\mathscr{A}$.

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $\alpha I_3 \in \mathscr{A}$.
2. L'ensemble $\mathscr{A}$ est-il sous-espace vectoriel de E ?
3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer BX_1 et BX_2.
   (b) En déduire deux valeurs propres de B.
   Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.
   (c) Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $B = PDP^{-1}$.
   (d) Démontrer que $D \in \mathscr{A}$, puis que $B \in \mathscr{A}$.
4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, telle que le spectre de M soit inclus dans $\{0,-1,-2\}$.
   Montrer que $M \in \mathscr{A}$.

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de $\mathscr{A}$

Soit M une matrice appartenant à $\mathscr{A}$. On note $\mathrm{Sp}\,(M)$ le spectre de M.

Pour toute valeur propre λ de M, on note $E_\lambda(M)$ le sous-espace propre de M associé à λ.

5. Déterminer un polynôme annulateur de M, et démontrer que le spectre de M est inclus dans $\{0,-1,-2\}$.
6. On suppose dans cette question que M admet 0, -1 et -2 comme valeurs propres.
   Justifier que M est diagonalisable.
7. (a) On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M.
   Justifier que M et $M+2I_3$ sont inversibles, puis démontrer que $M = -I_3$.
   (b) Que peut-on dire de M si $\mathrm{Sp}\,(M) = \{-2\}$? Si $\mathrm{Sp}\,(M) = \{0\}$?
8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre.
   Justifier que les matrices M, $M+I_3$ et $M+2I_3$ sont inversibles. Aboutir à une contradiction.

9. Dans cette question, on suppose que M admet exactement deux valeurs propres distinctes.
   On traite ici le cas où $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, -2\}$ (et on admet que dans les autres situations, le résultat serait similaire).
   On veut démontrer par l'absurde que M est diagonalisable, et **on suppose donc que M ne l'est pas**.
   On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base $\mathscr{B}$.
   On note enfin Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Montrer que :
   $$(M+I_3)(M+2I_3) = 0 \quad \text{et} \quad (M+2I_3)(M+I_3) = 0.$$

   (b) Justifier que $\dim E_{-1}(M) \geqslant 1$ et que $\dim E_{-2}(M) \geqslant 1$.

   (c) En utilisant que M n'est pas diagonalisable, démontrer que :
   $$\dim E_{-1}(M) = 1 \quad \text{et} \quad \dim E_{-2}(M) = 1.$$

   (d) Soit U un vecteur propre de M associé à la valeur propre -1.
   Soit V un vecteur propre de M associé à la valeur propre -2.

      i. Justifier que (U,V) forme une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

      ii. Soit W un vecteur de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(U,V)$. Montrer que la famille (U,V,W) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

      iii. En utilisant le fait que $(M+I_3)(M+2I_3)W = 0$ et $(M+2I_3)(M+I_3)W = 0$, montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :
      $$MW + 2W = \alpha U \quad \text{et} \quad MW + W = \beta V.$$
      En déduire que W est une combinaison linéaire de U et V, et aboutir à une contradiction.

10. Montrer alors que pour toute matrice M de E :
$$M \in \mathscr{A} \Longleftrightarrow M \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}.$$

EXERCICE 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. (a) Démontrer que : $\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$.

   (b) Démontrer que : $\forall y \in]0,1]$, $\displaystyle\int_y^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1 + y - y\ln(y)$.
   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge et déterminer sa valeur.

   (c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.

2. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \left(t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right)$.

   (b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n.

3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. (a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , on a :

$$\forall t \in]0,1],\, 0 \leqslant \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leqslant -t^n \ln(t).$$

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

   (c) Déduire des questions précédentes que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = -1$.

5. (a) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant \ln(x) \leqslant x$.
   En déduire que pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^{n-1}}$$

   (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{1}{n-2}$.

   (c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Partie C

L'objectif de cette partie est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale J_n à l'aide de Python.

6. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0,1]$.
   À l'aide du changement de variable : $u = -\ln(t)$, montrer que :

$$\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

7. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramère 1.

   (a) Donner une densité de X.

   (b) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $Y_n = \dfrac{-X}{1+e^{-nX}}$.

   Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, Y_n admet une espérance, et que $E(Y_n) = J_n$.

8. On rappelle qu'en langage Python :
   – l'instruction `rd.exponential(1)` du module `numpy.random` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1,
   – l'instruction `np.exp` du module `numpy` désigne la fonction exponentielle.
   Compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument deux entiers n et m, et qui renvoie une matrice à une ligne et m colonnes dont chaque coefficient est une simulation de la réalisation de Y_n :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def simulY(n,m):
    Y=np.zeros(...............)
    for i in range(.....):
        X=rd.exponential(1)
        Y[0,i]=..............
    return Y
```

9. (a) Énoncer la loi faible des grands nombres.

   (b) On tape dans Python le script suivant :

```
n=int(input("entrer la valeur de n"))
print(np.mean(simulY(n,1000)))
```

   Expliquer ce que fait ce script dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3

On lance indéfiniment une piece équilibrée.
On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux ≪ Pile ≫ consécutifs.
On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux ≪ Pile ≫ consécutifs.
Si on n'obtient jamais deux ≪ Pile ≫ consécutifs, on conviendra que X vaut -1.
Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors $X = 5$.
Pour tout entier n supérieur ou égal 1, on pose les événements suivants :

- F_n : ≪ Obtenir Face au n-ième lancer ≫
- P_n : ≪ Obtenir Pile au n-ième lancer ≫

La suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose les événements suivants :

- U_n : ≪ Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs ≫
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = \mathbf{P}(U_n) \text{ et } a_n = \mathbf{P}(X = n).$$

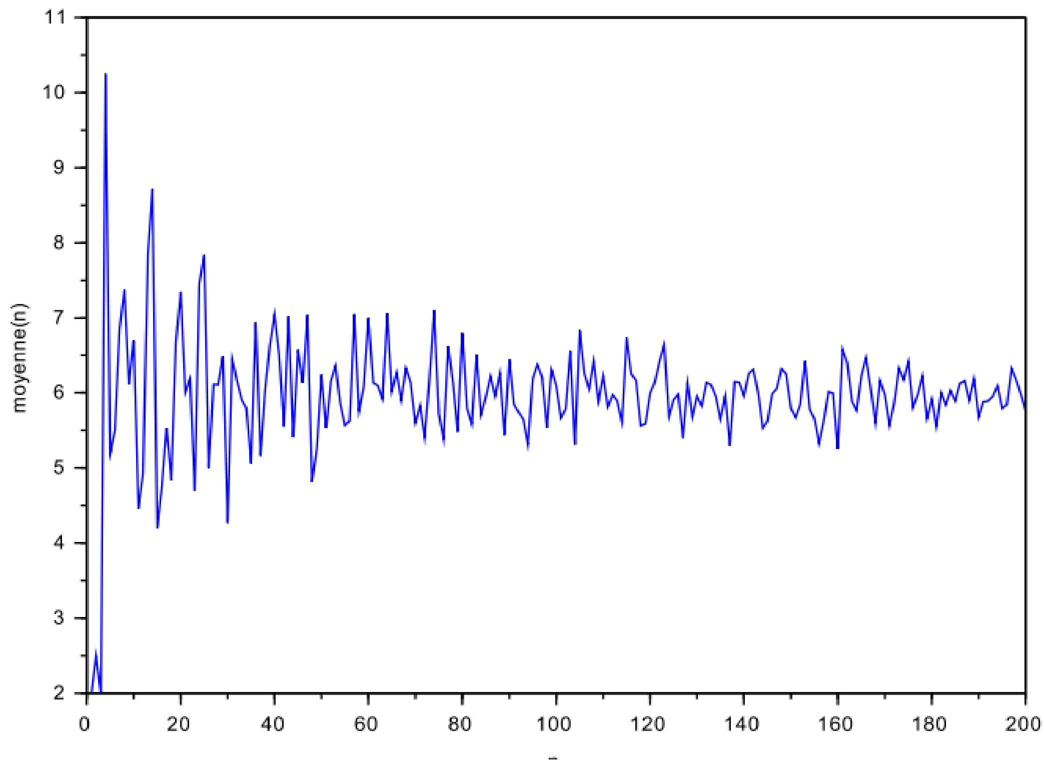
Partie A

1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k.
   En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4.
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$.
3. (a) Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux ≪ Pile ≫ consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
from numpy.random import random
def simulX():
    tirs=0
    pile=0
    while pile............
        if random()<1/2:
            pile=pile+1
        else:
            pile=........
        tirs=..........
    return tirs
```

   (b) Écrire une fonction Python d'en-tête `def moyenne(n)` qui simule `n` fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

(c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier `n` de $[\![1,200]\!]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Partie B

4. (a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal a 2 :

$$\mathbf{P}(U_{n+1}) = \mathbf{P}(U_n) + \mathbf{P}(B_{n+1}) - \mathbf{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

(b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).$$

(c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.

6. En déduire que :

$$\mathbf{P}(X = -1) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 0$$

Partie C : Étude de l'espérance de X.

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$v_n = 1 - u_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=2}^{n} k\mathbf{P}(X = k).$$

7. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8} v_{n-2}$$

8. Justifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbf{P}(X = n+1) = v_n - v_{n+1}$$

9. Démontrer alors par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$$

10. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et majorée.
11. Montrer que X admet une espérance.
12. (a) Démontrer que la suite $(nv_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers un réel λ.
    (b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
    À l'aide de l'égalité démontrée à la question 7, obtenir une contradiction.
    (c) Donner alors la valeur de l'espérance de X.