

DS2 - ECG2 - Mathématiques appliquées
mercredi 09/11/2022



Exercice 1



On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsque

il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que : $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple



On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer les valeurs propres de A .
Justifier que A est inversible et diagonalisable.
- 2) Déterminer une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, telles que $A = PDP^{-1}$.
Expliciter la matrice D^{-1} .
- 3) On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ .
- 4) En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de \mathbb{R}^3 définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

- 5) Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
- 6) (a) Vérifier que 1 est valeur propre de f et que (u_1, u_2) est une base du sous-espace propre associé.
(b) Déterminer un vecteur u_3 de \mathbb{R}^3 tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.

(c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de \mathbb{R}^3 .

- 7) (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base \mathcal{B}_1 et la matrice M_2 de f dans la base \mathcal{B}_2 .
- (b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.
- 8) En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose : $N = T - I_3$.

- 9) Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?
- 10) (a) Calculer N^3 et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.
- (b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2 .
- 11) On note g l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est N .
 - (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de \mathbb{R}^3 tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.
 - (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - (c) Écrire la matrice de g dans la base \mathcal{B}_3 .
 - (d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.
- 12) Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 2

Soit $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$

Partie I

1) Ecrire une fonction Python $fibonacci(n)$ qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de F_n .

En exécutant le script ci-dessous :

```
L=[]
for k in range(15):
    L.append(fibonacci(k))
print(L)
```

On obtient alors : $[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377]$

2) a) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 2, F_{n+1} > F_n > 0$.

b) Montrer qu'il existe des réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, F_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Puis, calculer la valeur de α et β .

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$.

3) Compléter la fonction Python ci-dessous prenant en entrée :

- un entier naturel x ,
- une liste L déjà triée dans l'ordre croissant dont le premier élément est inférieur ou égal à x et le dernier élément est strictement supérieur à x , et qui renvoie le plus grand élément de L qui soit inférieur ou égal à x .

```
def recherche(x,L):
    k=0
    while L[k]<=x:
        k=.....
    return .....
```

Partie II

On s'intéresse au théorème suivant, appelé **théorème de Zeckendorf** :

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique $k \in \mathbf{N}^*$ et un unique k -uplet (c_1, \dots, c_k) d'entiers naturels vérifiant $c_1 \geq 2$ et $\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, c_{i+1} > c_i + 1$, tels que

$$n = \sum_{i=1}^k F_{c_i}.$$

Cette décomposition s'appelle la **décomposition de Zeckendorf** de n .

Par exemple, $n = 4$ se décompose en $4 = 1 + 3 = F_2 + F_4$.

Donc $k = 2$ et $(c_1, c_2) = (2, 4)$.

Par ailleurs, $n = 17$ se décompose en $17 = 1 + 3 + 13 = F_2 + F_4 + F_7$.

Donc $k = 3$ et $(c_1, c_2, c_3) = (2, 4, 7)$.

4) On rappelle que la liste des premiers termes de la suite $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ a été donnée dans la question 2).

a) En remarquant que $6 = 1 + 2 + 3 = F_2 + F_3 + F_4$ et que $6 = 1 + 5 = F_2 + F_5$, donner la décomposition de Zeckendorf de 6 en justifiant votre choix.

b) Donner la décomposition de Zeckendorf du nombre 35.

c) Donner la décomposition de Zeckendorf du nombre 130.

5) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $A_n = \{i \in \mathbf{N}^* \mid F_i \leq n\}$.

a) Justifier que A_n est une partie non vide et finie de \mathbf{N}^* .

b) On pose $j = \max(A_n)$, ce qui signifie que j est le plus grand entier appartenant à A_n .

Montrer que $j \geq 2$ et que $F_j \leq n < F_{j+1}$.

c) Montrer que $n - F_j < F_{j-1}$.

d) Supposons qu'il existe $l \in \mathbf{N}^*$ et un l -uplet (d_1, \dots, d_l) d'entiers naturels vérifiant :

$$d_1 \geq 2, \forall i \in \llbracket 1, l-1 \rrbracket, d_{i+1} > d_i + 1 \text{ et } n - F_j = \sum_{i=1}^l F_{d_i}.$$

Montrer qu'il existe un entier k que l'on exprimera à l'aide de l et qu'il existe un k -uplet (c_1, \dots, c_k) d'entiers naturels tels que

$$c_1 \geq 2, \forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, c_{i+1} > c_i + 1 \text{ et } n = \sum_{i=1}^k F_{c_i}.$$

6) Que renvoie la fonction suivante ? Justifier soigneusement.

```
def Zeckendorf(n):
    i=0
    L=[fibonacci(i)]
    while L[-1]<=n:
        i=i+1
        L.append(fibonacci(i))
    k=n
    T=[]
    while k>0:
        f=recherche(k,L)
        T.append(f)
        k=k-f
    return T
```

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = x - \ln(1 + x^2).$$

- 1) a) Justifier que f est de classe C^2 sur \mathbf{R} .
- b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
- c) En déduire le sens de variation de f .
- d) Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
- 2) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
- 3) Montrer que \mathcal{C}_f admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
- 4) Tracer \mathcal{C}_f ainsi que ses tangentes en l'origine et aux points d'inflexion. On donne $\ln 2 \approx 0,7$.