
Exercice 1 (ecricome 2008)

1) Pour tous réels a et b , on a :

$$M(a, b) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = aI + bA.$$

Donc $E = \text{Vect}(I, A)$, ce qui prouve que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

2) (I, A) est une famille génératrice de E . Elle est libre car I et A ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de E . De plus, $\dim E = 2$.

3)a) • $E_1(A) = \{U \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) \mid (A - I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A - I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y + 2z.$$

$$\text{Donc } E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y + 2z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une famille génératrice de } E_1(A) \text{ et libre car formée de}$$

deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $E_1(A)$.

• $E_2(A) = \{U \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) \mid (A - 2I)U = 0\}$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$(A - 2I)U = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -2z \\ x = -z \end{cases}$$

$$\text{Donc } E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = -2z, x = -z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbf{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_2(A)$ et libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $E_2(A)$.

b) $\dim E_1(A) + \dim E_2(A) = 2 + 1 = 3$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Donc A est diagonalisable.

4)a) A est diagonalisable. elle peut s'écrire sous la forme réduite $A = PDP^{-1}$ où :

- D est une matrice diagonale, portant sur sa diagonale les valeurs propres de A ,
- P est une matrice inversible dont les colonnes sont les bases des sous-espaces propres de A , rangées dans le même ordre que les valeurs propres ci-dessus.

Etant donnée la contrainte de l'énoncé, on prend :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, $A = PDP^{-1} \iff D = P^{-1}AP$.

b) On applique la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{matrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \\ L_3 \end{matrix}.$$

$$\text{Donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5) Pour tous réels a et b , on a :

$$D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P = P^{-1}(aI + bA)P = P^{-1}aIP + P^{-1}bAP = aI + bD.$$

Comme I et D sont diagonales, alors $D(a, b)$ est diagonale.

6)a) D'après 5), $M(a, b)$ et $D(a, b)$ sont semblables. Elles ont donc même rang.

Ainsi, $M(a, b)$ inversible $\iff D(a, b)$ inversible.

$$\text{b) } D(a, b) = \begin{pmatrix} a + 2b & 0 & 0 \\ 0 & a + b & 0 \\ 0 & 0 & a + b \end{pmatrix}.$$

Donc $M(a, b)$ inversible $\iff D(a, b)$ inversible $\iff a + 2b \neq 0$ et $a + b \neq 0$.

$$\begin{aligned}
7) \text{a) } M(a, b)^2 = I &\iff P^{-1}M(a, b)^2P = P^{-1}IP \\
&\iff P^{-1}M(a, b)PP^{-1}M(a, b)P = I \\
&\iff (P^{-1}M(a, b)P)^2 = I \\
&\iff D(a, b)^2 = I.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } D(a, b)^2 = I &\iff \begin{pmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff (a+2b)^2 = 1 \text{ et } (a+b)^2 = 1 \\
&\iff (a+2b)^2 = \pm 1 \text{ et } (a+b)^2 = \pm 1 \\
&\iff \begin{cases} a+2b = 1 \text{ et } a+b = 1 \\ a+2b = 1 \text{ et } a+b = -1 \\ a+2b = -1 \text{ et } a+b = 1 \\ a+2b = -1 \text{ et } a+b = -1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 1 \text{ et } b = 0 \\ a = -3 \text{ et } b = 2 \\ a = 3 \text{ et } b = -2 \\ a = -1 \text{ et } b = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Du fait de l'équivalence précédente, les quatre matrices solution sont donc :

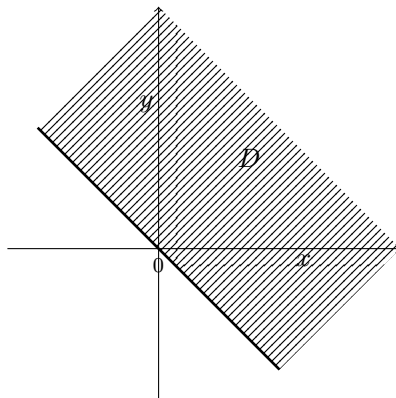
$$\begin{aligned}
M(1, 0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
M(-3, 2) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 4 & -5 & -8 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
M(3, -2) &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -4 & 5 & 8 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\
M(-1, 0) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (ecricome 2008)**Partie I**

a) $(x, y) \in D_g \iff x + y > 0$.

D est un demi-plan de frontière la droite d'équation $x + y = 0$, c'est-à-dire $y = -x$.

Il contient par exemple le point $(1, 1)$ puisque $1 + 1 > 0$.



b) g est de classe C^1 sur D comme somme et composée de fonctions C^1 . Elle possède donc des dérivées partielles d'ordre 1 données par :

$$\forall (x, y) \in D, \partial_1 g(x, y) = \frac{1}{x+y} \quad \text{et} \quad \partial_2 g(x, y) = \frac{1}{x+y}.$$

Ces dérivées partielles ne peuvent pas s'annuler. Donc g ne possède pas de point critique. En conséquence, g ne possède pas d'extrémum sur D .

Partie II

a) $f_1(x) = g(x, 1) = 1 + \ln(x + 1)$.

$f_1(x)$ existe $\iff x + 1 > 0 \iff x > -1$. Donc $D_{f_1} =]-1, +\infty[$.

b) f_1 est de classe C^2 sur $] -1, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions C^2 . Elle possède donc un DL en 0 à l'ordre 2, donné par la formule de Taylor-Young :

$$f_1(x) \underset{0}{=} f_1(0) + f_1'(0)x + \frac{f_1''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

$$\forall x > -1, f_1'(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad f_1''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}.$$

$$\text{On a : } f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = 1 \quad \text{et} \quad f_1''(0) = -1.$$

$$\text{On déduit : } f(x) \underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

c) Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_1$ en 0 est donnée par : $y = f_1'(0)x + f_1(0)$, c'est-à-dire $y = x + 1$.

Compte tenu du DL trouvé précédemment, on déduit :

$$\forall x > -1, f_1(x) - (x + 1) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

$f_1(x) - (x+1)$ et $-\frac{x^2}{2}$ ont donc même signe au voisinage de 0.

Ainsi, quand x est proche de 0, on a : $f_1(x) - (x+1) \leq 0$.

Donc localement en 0, $\mathcal{C}_1$ est sous sa tangente.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$. Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$.

Partie III

a) On remarque que $f_p(x) = x \iff h_p(x) = 0$.

$h_p : x \mapsto x - 1 - \ln(x+p)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ par différence et composée de fonctions dérivables.

$\forall x > 0, h'_p(x) = 1 - \frac{1}{x+p} = \frac{x+p-1}{x+p} > 0$ car $x > 0$ et $p \geq 1$.

Donc h_p est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Elle y est également continue (car dérivable). Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $h_p(]0, +\infty[)$, intervalle qu'on détermine en cherchant les limites de h_p en 0^+ et $+\infty$.

En 0^+ , on a immédiatement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} h_p(x) = -1 - \ln p$.

En $+\infty$, on a une forme indéterminée $+\infty - +\infty$. On réécrit h_p sous la forme :

$$h_p(x) = x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+p)}{x} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 1$$

En posant $t = x + p$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+p)}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t-p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \text{ par croissances comparées}$$

(j'ai utilisé que $t-p \underset{+\infty}{\sim} t$).

On déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+p)}{x} \right) = 1$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_p(x) = +\infty$.

Ainsi, h_p est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] -1 - \ln p, +\infty[$.

$0 \in] -1 - \ln p, +\infty[$ admet donc un unique antécédent $\alpha_p > 0$ par h_p .

L'équation $h_p(x) = 0$, c'est-à-dire $f_p(x) = x$, admet donc une unique solution α_p sur $]0, +\infty[$.

b) • Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} h_{p+1}(x) - h_p(x) &= (x - f_{p+1}(x)) - (x - f_p(x)) \\ &= f_p(x) - f_{p+1}(x) \\ &= \ln(x+p) - \ln(x+p+1). \end{aligned}$$

$x+p \leq x+p+1$ donc $\ln(x+p) \leq \ln(x+p+1)$ par croissance de $\ln$.

On déduit : $\forall x > 0, h_{p+1}(x) - h_p(x) \leq 0$, c'est-à-dire $h_{p+1}(x) \leq h_p(x)$.

En particulier, $h_{p+1}(\alpha_{p+1}) \leq h_p(\alpha_{p+1})$.

Enfin, par construction, $h_{p+1}(\alpha_{p+1}) = 0$.

En remplaçant dans l'inégalité, on déduit : $h_p(\alpha_{p+1}) \geq 0$.

- Comme $h_p(\alpha_p) = 0$, l'inégalité ci-dessus se réécrit : $h_p(\alpha_{p+1}) \geq h_p(\alpha_p)$.
 Par stricte croissance de h_p , on conclut : $\alpha_{p+1} \geq \alpha_p$.
 Donc la suite $(\alpha_p)_{p \geq 1}$ est croissante (donc monotone).
 c) L'égalité $f_p(\alpha_p) = \alpha_p$ donne : $\alpha_p = 1 + \ln(\alpha_p + p)$.
 $\alpha_p > 0$ donc $\alpha_p + p \geq p$, puis $\ln(\alpha_p + p) \geq \ln(p)$ et $1 + \ln(\alpha_p + p) \geq 1 + \ln(p)$.
 Donc $\forall p \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_p \geq 1 + \ln(p)$.
 $\lim_{p \rightarrow +\infty} 1 + \ln(p) = +\infty$. Par passage à la limite, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha_p = +\infty$.

Partie IV

a) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $u_n \geq 1$ ».

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit : « $u_0 \geq 1$ ». C'est vrai puisque $u_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par HR, $u_n \geq 1$. Par croissance de f_1 , on déduit :
 $f_1(u_n) \geq f_1(1)$, soit $u_{n+1} \geq 1 + \ln 2 \geq 1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

b) • $f_1 : x \mapsto 1 + \ln(x+1)$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ donc sur $[1, +\infty[$.
 $\forall x \in [1, +\infty[$, $f_1'(x) = \frac{1}{x+1}$.

On obtient facilement : $\forall x \in [1, +\infty[$, $0 \leq f_1'(x) \leq \frac{1}{2}$ d'où $|f_1'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous réels a et b de $[1, +\infty[$:

$$|f_1(b) - f_1(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|.$$

Comme α_1 et u_n sont dans $[1, +\infty[$, il est licite d'appliquer (*) avec $a = \alpha_1$ et $b = u_n$, ce qui donne :

$$|f_1(u_n) - f_1(\alpha_1)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|.$$

Or, $f_1(u_n) = u_{n+1}$ et $f_1(\alpha_1) = \alpha_1$ par construction. On conclut que

$$\forall n \in \mathbf{N}, |u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|.$$

- On fait ensuite une récurrence.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ».

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit : « $|u_0 - \alpha_1| \leq 2$ ».

Or, $u_0 = 1$ et α_1 sont dans $[1, 3]$, intervalle de longueur 2. La distance entre u_0 et α_1 , c'est-à-dire $|u_0 - \alpha_1|$ est donc inférieure ou égale à 2.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On sait que $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|$ (*)

Par HR, $|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

En multipliant membre à membre par $\frac{1}{2}$, on a : $\frac{1}{2} |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (**)

En recollant (*) et (**): $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c) Pour que $|u_n - \alpha_1| \leq 10^{-4}$, il suffit de prendre n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4}$.

Or, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4} \iff \ln \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) \leq \ln(10^{-4})$

$$\iff (n-1) \ln \left(\frac{1}{2} \right) \leq -4 \ln 10$$

$$\iff -(n-1) \ln 2 \leq -4 \ln 10$$

$$\iff n-1 \geq \frac{4 \ln 10}{\ln 2}$$

$$\iff n \geq \frac{4 \ln 10}{\ln 2} + 1.$$

On peut prendre par exemple : $n_0 = \lfloor \frac{4 \ln 10}{\ln 2} + 1 \rfloor + 1$.

d) Programme Python

```
import numpy as np
nzero=int(np.floor(4*np.log(10)/np.log(2)+1)+1)
def f1(x):
    y=1+np.log(x+1)
    return y
u=1
for k in range(nzero-1):
    u=f1(u)
print(nzero)
print(u)
```

Python affiche $n_0 = 15$ et $u_{n_0} = 2.146193049072588$.

Exercice 3 (ecricome 2008)

Partie I : premier jeu

a) L'expérience aléatoire est constituée de N épreuves successives, identiques et indépendantes.

A chaque épreuve, la probabilité de succès est $1/10$.

X_N compte le nombre de succès. Donc $X_N \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1/10)$.

Le cours donne : $E(X_N) = \frac{N}{10}$ et $V(X_N) = N \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9N}{100}$.

b) Les X_N gagnées apportent un gain de $3X_N$ euros auquel il faut retirer N euros de mise. Donc $Y_N = 3X_N - N$.

Par linéarité, on a : $E(Y_N) = 3E(X_N) - N = 3 \times \frac{N}{10} - N = -\frac{7N}{10}$.

$$V(Y_N) = 3^2 V(X_N) = \frac{81N}{100}.$$

c) i. $X_{60} \hookrightarrow \mathcal{B}(60, 1/10)$. D'après le cours, on peut approcher la loi de X_{60} par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 60 \times \frac{1}{10} = 6$.

ii. La probabilité demandée est :

$$P(Y_{60} > -50) = P(3X_{60} - 60 > -50)$$

$$= P\left(X_{60} > \frac{10}{3}\right)$$

$$= 1 - P\left(X_{60} \leq \frac{10}{3}\right)$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^3 P(X_{60} = i)$$

En approchant la loi de X_{60} par la loi de Poisson $\mathcal{P}(6)$, on obtient par l'annexe :

$$\sum_{i=0}^3 P(X_{60} = i) \approx 0,1512. \text{ Donc } P(Y_{60} > -50) \approx 0,8488$$

Partie II : deuxième jeu

a) • f est continue sur $[0, 1]$ car polynomiale et continue sur $] -\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ comme fonction nulle. Donc f est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0 et 1.

$\forall x \in [0, 1], f(x) = 2x \geq 0$ et $\forall x \notin [0, 1], f(x) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx \text{ et } \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ convergent et valent } 0.$$

De plus, $\int_0^1 f(x)dx$ converge car f est continue sur $[0, 1]$.

$$\text{Par Chasles, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ converge et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 2xdx = [x^2]_0^1 = 1.$$

On conclut que f est une densité de probabilité.

• Par définition, $\forall x \in \mathbf{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. On distingue 3 cas :

Premier cas : $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0.$$

Deuxième cas : $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x 2tdt \\ &= 0 + [t^2]_0^x = x^2. \end{aligned}$$

Troisième cas : $x > 1$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 2tdt + \int_1^x 0dt \\ &= 0 + [t^2]_0^1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) X_i admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx$ converge.

f étant nulle sur $] -\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$, on se ramène à la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 |xf(x)|dx = \int_0^1 2x^2dx.$$

Cette intégrale converge puisque $x \mapsto 2x^2$ est continue sur $[0, 1]$.

Donc X_i admet une espérance donnée par :

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 2x^2dx = \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

c) Pour tout t réel, on a : $(M > t) = (X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap (X_3 > t)$.

d) Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} F_M(x) &= P(M \leq x) \\ &= 1 - P(M > x) \\ &= 1 - P((X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap (X_3 > x)) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x)P(X_3 > x) \quad \text{par indépendance de } X_1, X_2, X_3 \\ &= 1 - (1 - P(X_1 \leq x))(1 - P(X_2 \leq x))(1 - P(X_3 \leq x)) \\ &= 1 - (1 - F(x))^3. \end{aligned}$$

F est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0 et 1, comme fonction de répartition de la variable aléatoire à densité X_i .

Il en est de même pour F_M par différence et puissance.

Donc M est une variable aléatoire à densité. Une densité de M s'obtient en dérivant F_M aux points où elle est dérivable et en prenant une valeur arbitraire positive aux autres points (0 et 1).

Donc $\forall x \neq \{0, 1\}$, $f_M(x) = F'_M(x) = 3F'(x)(1 - F(x))^2$.

On obtient alors, compte tenu de l'expression de F trouvée en a) :

$$f_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 6x(1 - x^2)^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En 0 et en 1, on peut prendre $f_M(0) = f_M(1)$, ce qui permet de recoller aux formules :

$$\text{Ainsi, } f_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 6x(1 - x^2)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

e) Le joueur gagne si au moins l'une des fléchettes arrive à une distance inférieure à $1/5$ du centre, ce qui se produit si et seulement si la flèche la plus proche arrive à une distance inférieure à $1/5$ du centre.

Ainsi, $P(G) = P\left(M < \frac{1}{5}\right) = F_M\left(\frac{1}{5}\right) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{1}{5}\right)\right)^3 = 1 - \left(1 - \frac{1}{25}\right)^3$.

Donc $P(G) = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^3$.

Partie III : troisième jeu

a) Distinguons 2 cas :

- $n \leq N$

Les n boules peuvent être lancées dans la même case, auquel cas, $T_n = 1$.

Elles peuvent aussi être lancées dans n cases différentes, auquel cas $T_n = n$.

Il y a aussi toutes les possibilités intermédiaires. Donc $T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

- $n > N$

C'est la même idée, mais comme il y a moins de cases que de boules, T_n ne peut pas dépasser N . Donc $T_n(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$.

En conclusion, $T_n(\Omega) = \llbracket 1, \min(n, N) \rrbracket$.

b) • loi de T_1

$T_1(\Omega) = \{1\}$ et $P(T_1 = 1) = 1$ donc T_1 suit une loi certaine.

- loi de T_2

$T_2(\Omega) = \{1, 2\}$.

Réaliser l'expérience consiste à construire une application de l'ensemble E des boules dans l'ensemble F des cases. Il y a N^2 applications possibles.

Parmi ces applications, on cherche celles qui sont injectives (les 2 boules n'étant pas lancées dans la même case). Il y en a $N(N - 1)$.

En effet, la première boule a N choix de case. Etant lancée, la deuxième boule n'a plus que $N - 1$ choix de case.

Donc $P(T_2 = 2) = \frac{N(N - 1)}{N^2} = \frac{N - 1}{N}$. Puis, $P(T_2 = 1) = 1 - P(T_2 = 2) = \frac{1}{N}$.

c) Soit $n \geq 2$. On reprend le modèle fait au-dessus.

Il y a N^n applications de l'ensemble E des boules dans l'ensemble F des cases. Il reste à dénombrer les cas favorables.

(i) calcul de $P(T_n = 1)$

Il y a N applications où les boules ont la même image, (les boules sont toutes lancées dans la même case).

$$\text{Donc } P(T_n = 1) = \frac{N}{N^n} = \frac{1}{N^{n-1}}.$$

(ii) calcul de $P(T_n = 2)$

On choisit les 2 cases parmi N où vont arriver les boules, il y a $\binom{N}{2}$ choix.

Puis on construit une application surjective de E dans l'ensemble des 2 cases choisies (surjective car aucune des 2 cases ne doit être vide). Il y a $2^n - 2$ choix (puisque'il faut retirer aux 2^n applications possibles les deux qui envoient les n boules dans la même case).

$$\text{Donc } P(T_n = 2) = \frac{\binom{N}{2} (2^n - 2)}{N^n}.$$

(iii) calcul de $P(T_n = n)$

On distingue deux cas :

- $n > N$

On a $P(T_n = n) = 0$ puisqu'on ne peut pas remplir n cases si le nombre N de cases disponibles est inférieur à n .

- $n \leq N$

On commence par choisir les n cases où vont arriver les boules, il y a $\binom{N}{n}$ choix.

Puis on construit une application bijective de E dans l'ensemble des n cases choisies, il y a $n!$ choix.

$$\text{Donc } P(T_n = n) = \frac{\binom{N}{n} n!}{N^n}.$$

d) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$.

Pour qu'après $n + 1$ lancers, k cases soient remplies, il est nécessaire et suffisant qu'après les n premiers lancers, k ou $k - 1$ cases soient remplies.

Mathématiquement, cela signifie en terme d'événements que :

$$(T_{n+1} = k) = ((T_{n+1} = k) \cap (T_n = k)) \cup ((T_{n+1} = k) \cap (T_n = k - 1)).$$

On déduit par incompatibilité :

$$\begin{aligned} P(T_{n+1} = k) &= P((T_{n+1} = k) \cap (T_n = k)) + P((T_{n+1} = k) \cap (T_n = k - 1)). \\ &= P_{(T_n = k)}(T_{n+1} = k) P(T_n = k) + P_{(T_n = k-1)}(T_{n+1} = k) P(T_n = k - 1) \quad (*) \end{aligned}$$

Il reste à calculer les probabilités conditionnelles.

$P_{(T_n = k)}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}$ car si au bout de n lancers, k cases sont atteintes, il faut que le $n + 1$ -ème lancer atteigne l'une des k cases déjà remplies parmi les N possibles, si l'on veut réaliser l'événement $(T_{n+1} = k)$.

De même, $P_{(T_n = k-1)}(T_{n+1} = k) = \frac{N - (k - 1)}{N} = \frac{N - k + 1}{N}$ car si au bout de n lancers, $k - 1$ cases sont atteintes, il faut que le $n + 1$ -ème lancer atteigne l'une des $N - (k - 1)$ cases non encore remplies parmi les N possibles, si l'on veut réaliser l'événement $(T_{n+1} = k)$.

En remplaçant dans (*), on déduit :

$$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}P(T_n = k) + \frac{N - k + 1}{N}P(T_n = k - 1) \quad (I)$$

e) On pose $\forall x \in \mathbf{R}$, $G_n(x) = \sum_{k=1}^n P(T_n = k)x^k$.

i) $G_n(1) = \sum_{k=1}^n P(T_n = k) = 1$ puisque $T_n(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$.

ii) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a :

$$G'_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n P(T_n = k)x^k \right)' = \sum_{k=1}^n (P(T_n = k)x^k)' = \sum_{k=1}^n P(T_n = k)kx^{k-1}.$$

Donc $G'_n(1) = \sum_{k=1}^n kP(T_n = k) = E(T_n)$.

iii) Soit $x \in \mathbf{R}$. En multipliant les membres de (I) par x^k , on obtient :

$$P(T_{n+1} = k)x^k = \frac{k}{N}P(T_n = k)x^k + \frac{N - k + 1}{N}P(T_n = k - 1)x^k.$$

Puis, par sommation et linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(T_{n+1} = k)x^k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{N}P(T_n = k)x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{N - k + 1}{N}P(T_n = k - 1)x^k.$$

C'est-à-dire :

$$G_{n+1}(x) = \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{n+1} kP(T_n = k)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) P(T_n = k-1)x^k.$$

Dans la somme de gauche, le terme d'indice $n+1$ est nul car $P(T_n = n+1) = 0$.

Dans la somme de droite, on développe et on sépare la somme en deux par linéarité.

$$G_{n+1}(x) = \frac{x}{N} \sum_{k=1}^n kP(T_n = k)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} P(T_n = k-1)x^k - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)P(T_n = k-1)x^k$$

Dans le membre de droite, on reconnaît la dérivée de G_n . Dans les autres sommes, on pose $j = k - 1$.

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \frac{x}{N} G'_n(x) + \sum_{j=0}^n P(T_n = j)x^{j+1} - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^n jP(T_n = j)x^{j+1} \\ &= \frac{x}{N} G'_n(x) + x \sum_{j=0}^n P(T_n = j)x^j - \frac{x^2}{N} \sum_{j=0}^n jP(T_n = j)x^{j-1} \\ &= \frac{x}{N} G'_n(x) + x \sum_{j=1}^n P(T_n = j)x^j - \frac{x^2}{N} \sum_{j=1}^n jP(T_n = j)x^{j-1} \\ &= \frac{x}{N} G'_n(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N} G'_n(x) \\ &= \frac{1}{N} (x - x^2) G'_n(x) + xG_n(x). \end{aligned}$$

iv) En dérivant l'égalité précédente, on obtient pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$G'_{n+1}(x) = \frac{1}{N} \left((1-2x)G'_n(x) + (x-x^2)G''_n(x) \right) + (G_n(x) + xG'_n(x))$$

Puis, en évaluant pour $x = 1$:

$$G'_{n+1}(1) = -\frac{1}{N}G'_n(1) + G_n(1) + G'_n(1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) G'_n(1) + G_n(1).$$

C'est-à-dire, compte tenu des questions e)i.ii :

$$E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1 \quad (1)$$

v) La suite $(E(T_n))_{n \geq 1}$ est arithmético-géométrique.

On introduit le réel x tel que $x = \left(1 - \frac{1}{N}\right)x + 1 \quad (2)$

On obtient $x = N$.

Par différence des lignes (1) et (2), on déduit :

$$E(T_{n+1}) - x = \left(1 - \frac{1}{N}\right) (E(T_n) - x).$$

$$\text{Soit, } E(T_{n+1}) - N = \left(1 - \frac{1}{N}\right) (E(T_n) - N).$$

La suite $(E(T_n) - N)_{n \geq 1}$ est donc géométrique de raison $1 - \frac{1}{N}$.

$$\text{Donc } \forall n \geq 1, E(T_n) - N = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} (E(T_1) - N).$$

T_1 est certaine et égale à 1 donc $E(T_1) = 1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} E(T_n) &= N + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} (1 - N) \\ &= N - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} N \left(1 - \frac{1}{N}\right) \\ &= N \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Remarque

On pouvait aussi faire une récurrence.