Exercice 1 (ecricome 2019) **(Original modifié !)**

Partie A

1)a)$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

$A^3 = A^2A = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1)b)Soit $P(X) = X^3$. On a : $P(A) = A^3 = 0$ donc P est un polynôme annulateur de A. Donc $sp(A) \subset \{\text{racines de } P\}$.
Comme 0 est l'unique racine de P, on a donc $sp(A) \subset \{0\}$, ce qui signifie que 0 est la seule valeur propre possible de A.

De plus, A n'est pas inversible (en effet, si A était inversible, A^3 le serait aussi). Donc 0 est bien valeur propre de A.

Finalement, 0 est l'unique valeur propre de A.

1)c)Supposons A diagonalisable. Alors, il existe une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ inversible telles que $A = PDP^{-1} \quad (*)$
D porte sur sa diagonale les valeurs propres de A, elle est donc nulle.
En reportant dans $(*)$, on déduit : $A = P0P^{-1} = 0$, ce qui est absurde.

Donc A n'est pas diagonalisable.

Remarque

On pouvait aussi montrer que $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, puis conclure par le théorème de réduction.

2)a)$Kerf = \big\{(u \in \mathbf{R}^3 \mid f(u) = 0\big\}$. Posons $u = (x, y, z)$.

$u \in Kerf \iff f(u) = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -x & + & 2y & + & z & = & 0 & L_1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 & L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcccrcll} 3x & + & & & 3z & = & 0 & L_1 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -z \\ y & = & -z \end{array}\right.$$

Donc $Kerf = \{(x,y,z) \mid x = -z, y = -z\} = \{(-z,z,z), z \in \mathbf{R}\}$.
Donc $Kerf = \text{Vect}\big((-1,-1,1)\big) = \text{Vect}\big(e'_1\big)$.
$\big(e'_1\big)$ est une famille génératrice de $Kerf$ et elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $Kerf$.

b)Pour tous réels a, b et c, on a :

$$
\begin{aligned}
ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0 &\iff a(-1,-1,1) + b(2,-1,1) + c(-1,2,1) = (0,0,0) \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -a & + & 2b & - & c & = & 0 & L_1 \\ -a & - & b & + & 2c & = & 0 & L_2 \\ a & + & b & + & c & = & 0 & L_3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} -a & + & 2b & - & c & = & 0 & L_1 \\ & & 3b & - & 3c & = & 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & & 3b & & & = & 0 & L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Donc la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre.
C'est une famille libre de $\mathbf{R}^3$ dont le cardinal vaut 3 et coïncide avec la dimension de $\mathbf{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbf{R}^3$.

c)$e'_1 \in Kerf$ donc $f(e'_1) = 0 = 0e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3$.
De plus, on a :

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } f(e'_2) = e'_1 = 1e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3.$$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } f(e'_3) = e'_2 = 0e'_1 + 1e'_2 + 0e'_3.$$

On déduit que $\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f) = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3)a)On peut remarquer que $M = -A + I$.

3)b)$M = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(h)$, $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$ et $I = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(id)$ où id est l'application identique de $\mathbf{R}^3$.

La question 3)a) donne alors : $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(h) = -\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) + \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(id)$, c'est-à-dire : $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(h) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(-f + id)$, ce qui donne $h = -f + id$.

On a donc $\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(h) = -\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f + id) = -\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f) + \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(id)$, c'est-à-dire :

$$M' = -T + I = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

✓ On pouvait aussi trouver M' par la formule de changement de base : $M' = P^{-1}MP$ où P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

3)c)M' est inversible car triangulaire sans zéro sur sa diagonale.
Donc h est bijective, puis M est inversible.

3)d)$(M-I)^3 = (-A)^3 = -A^3 = 0$.

En développant $(M-I)^3$, on obtient alors :

$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, c'est-à-dire $M(M^2 - 3M + 3I) = I$.

Donc M est inversible et $M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$.

3)e)Comme les matrices $-A$ et I commutent, la formule du binôme de Newton s'applique et donne pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} M^n &= (-A+I)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-A)^k I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k A^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-1)^k A^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k A^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-1)^k A^k + 0 \text{ car } \forall k \geq 3, A^k = 0. \end{aligned}$$

En écrivant en extension, on déduit :

$M^n = \binom{n}{0}(-1)^0 A^0 + \binom{n}{1}(-1)^1 A^1 + \binom{n}{2}(-1)^2 A^2$, ce qui donne :

$M^n = I - nA + \dfrac{n(n-1)}{2} A^2$.

Pour $n = -1$, on aurait : $M^{-1} = I + A + A^2 = I + (I-M) + (I-M)^2$
$= 2I - M + I^2 - 2IM + M^2 = M^2 - 3M + 3I$ et on retrouve 3)d).

Partie B

1)$VT = VV^2 = V^3 = V^2V = TV$.
$V = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(g)$ et $T = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f)$ donc $VT = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(gof)$ et $TV = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(fog)$.
$VT = TV$ donc $\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(gof) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(fog)$, ce qui montre que $gof = fog$.

2)a)$$\begin{aligned} f\big(g(e'_1)\big) &= (fog)(e'_1) \\ &= (gof)(e'_1) \text{ car } fog = gof \\ &= g\big(f(e'_1)\big) \\ &= g(0) \quad \text{car } e'_1 \in Kerf \\ &= 0 \text{ par linéarité de } g. \end{aligned}$$

Donc $g(e'_1) \in Kerf$.

Comme (e'_1) est une base de $Kerf$, tout vecteur de $Kerf$ s'écrit alors comme combinaison linéaire de e'_1.
Comme $g(e'_1) \in Kerf$, il existe donc un réel a tel que $g(e'_1) = ae'_1$.

2)b)$$\begin{aligned} f\big(g(e'_2) - ae'_2\big) &= f\big(g(e'_2)\big) - af(e'_2) \\ &= (fog)(e'_2) - af(e'_2) \\ &= (gof)(e'_2) - af(e'_2) \text{ car } fog = gof \\ &= g\big(f(e'_2)\big) - af(e'_2) \\ &= g(e'_1) - ae'_1 \text{ car } f(e'_2) = e'_1 \text{ par la question A)2)b)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $g(e'_2) - ae'_2 \in Kerf$.

De la même façon, $g(e'_2) - ae'_2$ en tant qu'élément de $Kerf$ s'écrit comme combinaison linéaire de e'_1.
Il existe donc un réel b tel que $g(e'_2) - ae'_2 = be'_1$ ou encore $g(e'_2) = be'_1 + ae'_2$.

2)c)$$\begin{aligned} (fog)(e'_3) &= (gof)(e'_3) \\ &= g\big(f(e'_3)\big) \\ &= g(e'_2) \text{ car } f(e'_3) = e'_2 \text{ par la question A)2)b)} \\ &= ae'_2 + be'_1 \text{ par la question B)2)b)} \end{aligned}$$

Compte tenu que $e'_2 = f(e'_3)$ et que $e'_1 = f(e'_2)$, l'égalité ci-dessus donne :
$(fog)(e'_3) = af(e'_3) + bf(e'_2)$ ou encore $f\big(g(e'_3)\big) - af(e'_3) - bf(e'_2) = 0$,
c'est-à-dire $f\big(g(e'_3) - ae'_3 - be'_2\big) = 0$, ce qui donne $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2 \in Kerf$.

2)d)Comme $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2 \in Kerf$, il existe un réel c tel que
$g(e'_3) - ae'_3 - be'_2 = ce'_1$, ce qui donne $g(e'_3) = ce'_1 + be'_2 + ae'_3$.
On a par ailleurs $g(e'_1) = ae'_1$ et $g(e'_2) = be'_1 + ae'_2$.

V étant la matrice de g dans la base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, on déduit :

$V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

3)$V^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$.

Par hypothèse, $V^2 = T$. En identifiant les coefficients de ces matrices, on a en particulier :

$a^2 = 0$ et $2ab = 1$, ce qui mène à une contradiction.

Exercice 2 (ecricome 2019)

Partie A

1)Le graphique semble indiquer que f admet un minimum local valant 3 en (1, 1).

2)a)Les fonctions $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y^2$ sont polynômiales donc de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R}_+^*$.
Par quotient, inverse et somme, f est donc de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R}_+^*$.

2)b)Pour tous $x>0$ et $y>0$, on a :

$\partial_1 f(x,y)=\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}$ et $\partial_2 f(x,y)=-\dfrac{2x}{y^3}+2y.$

Les points critiques de f sont les solutions sur $\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R}_+^*$ du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\partial_1 f(x,y)&=&0\\ \partial_2 f(x,y)&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}&=&0\\ -\dfrac{2x}{y^3}+2y&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}x^2&=&y^2\\ x&=&y^4\end{array}\right.$$

Comme $x>0$ et $y>0$, l'équation $x^2=y^2$ est équivalente à $x=y$.
Le système se ramène donc à :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&y\\ y&=&y^4\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}x&=&y\\ y(y^3-1)&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}x&=&y\\ y^3-1&=&0\text{ (car }y\neq 0)\end{array}\right.$$

Enfin, par bijectivité de la fonction cube, $y^3-1=0\iff y^3=1\iff y=1$.
f admet donc le point $A(1,1)$ comme seul point critique.

2)c)Pour tous $x>0$ et $y>0$, on a :

$\partial_{1,1}f(x,y)=\dfrac{2}{x^3}$, $\partial_{2,1}f(x,y)=\partial_{1,2}f(x,y)=-\dfrac{2}{y^3}$ et $\partial_{2,2}f(x,y)=\dfrac{6x}{y^4}+2.$

La matrice hessienne de f en A est

$$H=\begin{pmatrix}\partial_{1,1}f(x,y)&\partial_{1,2}f(x,y)\\ \partial_{2,1}f(x,y)&\partial_{2,2}f(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&8\end{pmatrix}.$$

2)d)λ est valeur propre de H
$\iff H-\lambda I$ n'est pas inversible
$\iff det(H-\lambda I)=0$
$\iff (2-\lambda)(8-\lambda)-(-2)\times(-2)=0.\iff\lambda^2-10\lambda+12=0.$

Les valeurs propres de H sont $\dfrac{10-\sqrt{52}}{2}$ et $\dfrac{10+\sqrt{52}}{2}$.

Elles sont strictement positives donc f admet en A un minimum relatif dont la valeur est $f(1,1)=3$.

Partie B

1)h_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme et inverse de fonctions dérivables et pour tout $x>0$, on a :

$h'_n(x) = nx^{n-1} - \dfrac{n}{x^{n+1}} = \dfrac{n\big(x^{2n}-1\big)}{x^{n+1}}$.

Pour tout $x>0$, $x^{n+1}>0$ donc $h'_n(x)$ est du signe de $x^{2n}-1$.

$h'_n(x) \geq 0 \iff x^{2n}-1>0 \iff x^{2n}>1 \iff x^{2n}>1^{2n} \iff x>1$ par stricte croissance de $x\mapsto x^{2n}$ sur $]0,+\infty[$.

Donc h_n est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n = 0$, par inverse $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$. Puis, $\lim\limits_{x\to 0^+} h_n(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$, par inverse $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$. Puis, $\lim\limits_{x\to +\infty} h_n(x) = +\infty$.

Le tableau de variations de h_n est :

x	0	u_n	1	v_n	$+\infty$
$h'_n(x)$		$-$	0	$+$	
$h_n(x)$	$+\infty$	4	3	4	$+\infty$

h_n est continue (car dérivable) sur $]0,1[$ et strictement décroissante.
Elle réalise donc une bijection de $]0,1[$ sur $f\big(]0,1[\big) =]3,+\infty[$.
$4\in]3,+\infty[$ admet donc un unique antécédent u_n dans $]0,1[$.

En faisant le même raisonnement sur $]1,+\infty[$, on obtient que 4 admet un unique antécédent v_n dans $]1,+\infty[$.

Enfin, 1 n'est pas solution de l'équation $h_n(x)=4$ puisque $h_n(1)=3$.

Donc l'équation $h_n(x)=4$ admet bien exactement deux solutions u_n et v_n telles que $0<u_n<1<v_n$.

3)a)Pour tout $x>0$ et tout $n\in\mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(x)-h_n(x) &= \left(x^{n+1}+1+\frac{1}{x^{n+1}}\right) - \left(x^n+1+\frac{1}{x^n}\right)\\
&= x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}} - x^n - \frac{1}{x^n}\\
&= \frac{x^{2n+2}+1-x^{2n+1}-x}{x^{n+1}}\\
&= \frac{(x-1)\big(x^{2n+1}-1\big)}{x^{n+1}}.
\end{aligned}$$

3)b)Dans l'inégalité précédente, on remplace $x > 0$ par $v_n > 0$, ce qui donne :

$h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) = \dfrac{(v_n - 1)\big(v_n^{2n+1} - 1\big)}{v_n^{n+1}}$.

D'après la question B2), $h_n(v_n) = 4$ et $v_n > 1$.

On déduit que $h_{n+1}(v_n) - 4 > 0$ donc $h_{n+1}(v_n) > 4$.

3)c)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $h_{n+1}(v_n) \geq 4$ et $h_{n+1}(v_{n+1}) = 4$.
Donc $h_{n+1}(v_n) \geq h_{n+1}(v_{n+1})$.

Comme v_n et v_{n+1} sont dans $]1, +\infty[$ et que h_{n+1} est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, on déduit que $v_n \geq v_{n+1}$.
Donc la suite (v_n) est décroissante.

4)a)(v_n) est décroissante et minorée (par 1) donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.
Notons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Comme $\forall n \in \mathbf{N}, v_n > 1$, on a par passage à la limite : $l \geq 1$.

4)b)Supposons que $l > 1$.
(v_n) est décroissante et converge vers l donc $\forall n \in \mathbf{N}, v_n \geq l$.

Par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbf{R}_+$, on déduit : $v_n^n \geq l^n \quad (*)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} l^n = +\infty$ car $l > 1$. Par passage à la limite dans $(*)$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$.

Enfin, on a :
– d'une part, $h_n(v_n) = 4$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(v_n) = 4$,
– d'autre part, $h_n(v_n) = v_n^n + 1 + \dfrac{1}{v_n^n}$, ce qui donne $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(v_n) = +\infty$ compte tenu que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n = +\infty$.

On obtient deux valeurs différentes pour $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n^n$, ce qui est contradictoire.

4)c)On sait que $l \geq 1$ et que l'hypothèse $l > 1$ mène à une contradiction.
Donc $l = 1$.

5)a)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $h_n(3) = 3^n + 1 + \dfrac{1}{3^n} \geq 4$ et $h_n(v_n) = 4$.
Donc $h_n(v_n) \leq h_n(3)$.
Par stricte croissance de h_n sur $]1, +\infty[$, on déduit : $v_n \leq 3$.

5b)Programme :

```
def h(n,x):
    y=x**n+1+1/x**n
    return y
```

5)c)Programme :

```
def v(n):
    a=1
    b=3
    while b-a>10**-5:
        c=(a+b)/2
        if h(n,c)<4:
            a=c
        else:
            b=c
    return c
```

5)d)Dans le programme, k est un entier entre 1 et 20, X et Y sont les listes définies par :
$X = [1, 2, 3, ..., 20]$ et $Y = \left[v(1), v(2)^2, v(3)^3, ..., v(20)^{20}\right]$.
Le programme affiche les 20 points de coordonnées $\left(k, v(k)^k\right)$.
Le graphique indique que pour tout $k \in \{1, ..., 20\}$, les valeurs $v(k)^k$ sont les mêmes (à peu près égales à 2,6).
On peut donc conjecturer que la suite (v_n^n) est constante.
5)e)Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $h_n(v_n) = 4$, soit : $v_n^n + 1 + \dfrac{1}{v_n^n} = 4$.
v_n^n est donc solution de l'équation $X + 1 + \dfrac{1}{X} = 4$, équation équivalente à :
$\dfrac{X^2 + X + 1}{X} = 4 \iff X^2 + X + 1 = 4X \iff X^2 - 3X + 1 = 0 \quad (E)$.
Les solutions de (E) sont $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$ et $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$.
Comme $v_n^n > 1$, on ne garde que la solution supérieure à 1.
Donc $v_n^n = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.
5)f)Le passage au logarithme donne :
$n \ln v_n = \ln \left(\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$, puis $\ln v_n = \dfrac{1}{n} \ln \left(\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$.
D'où, $v_n = exp\left(\dfrac{1}{n} \ln \left(\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\right)$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \ln \left(\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} exp(x) = 1$.
Par composée, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$ et on retrouve la question B)4)c).

Exercice 3 (ecricome 2019)

Partie A

1)On a déjà f définie sur $\mathbf{R}$ donc $\forall t \in D_f, -t \in D_f$.
Puis, distinguons trois cas :
• $t \geq 1$:
On a alors $-t \leq -1$. Donc $f(-t) = \dfrac{-1}{(-t)^3} = \dfrac{-1}{-t^3} = \dfrac{1}{t^3} = f(t)$.
• $-1 < t < 1$:
On a alors $-1 < -t < 1$. Donc $f(-t) = 0 = f(t)$.
• $t \leq -1$:
On a alors $-t \geq 1$. Donc $f(-t) = \dfrac{1}{(-t)^3} = \dfrac{1}{-t^3} = f(t)$.
Ainsi, $\forall t \in \mathbf{R}, f(-t) = f(t)$. Donc f est paire.

2)Soit $x \geq 1$.

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-3}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

3)a)Soit $A > 1$ un réel.
Dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$, posons $u = -t$ ou $t = -u$.
La fonction $\varphi : u \mapsto -u$ est affine donc de classe C^1.
Le changement de variable est licite et donne :

$$\int_{-A}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = \int_A^1 f(-u)\varphi'(u)\mathrm{d}u = \int_A^1 f(-u) \times (-1)\mathrm{d}u = \int_1^A f(-u)\mathrm{d}u$$
$$= \int_1^A f(u)\mathrm{d}u \text{ par parité de } f.$$

On faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

3)b)• f est continue sur $[1, +\infty[$ car elle coïncide sur cet intervalle avec l'inverse d'une fonction continue.
Elle est de même continue sur $]-\infty, -1]$, puis continue sur $]-1, 1[$ coïncidant

sur cet intervalle avec la fonction nulle.
Donc f est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en -1 et 1.

• $\forall t \in \mathbf{R}, f(t) \geq 0$.

• On sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t$ convergent et valent $\dfrac{1}{2}$.

Par ailleurs, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 0 car f est nulle sur $]-1,1[$.

Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1.$$

On conclut que f est une densité de probabilité.

4)a)Pour tout x réel, on a : $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

Distinguons trois cas :

• $x \leq -1$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t = \lim_{A\to-\infty} \int_A^x \frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t = \lim_{A\to-\infty} \left[\frac{1}{2t^2}\right]_A^x$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2A^2}\right) = \frac{1}{2x^2}.$$

• $-1 < x < 1$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \int_{-1}^{x} 0\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

• $x \geq 1$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_1^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2} + 0 + \int_1^x \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \left[\frac{-1}{2t^2}\right]_1^x = \frac{1}{2} + \left(\frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2x^2}.$$

4)b)X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big|tf(t)\big|\mathrm{d}t$ converge.

$\displaystyle\int_0^1 \big|tf(t)\big|\mathrm{d}t$ converge et vaut zéro puisque f est nulle sur $[0,1]$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \big|tf(t)\big|\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \left|t \times \frac{1}{t^3}\right| \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ de paramètre $2 > 1$.

Par Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big|tf(t)\big|\mathrm{d}t$ converge.

Or, $t \mapsto f(t)$ est paire et $t \mapsto t$ est impaire donc $t \mapsto tf(t)$ est impaire.
Donc $t \mapsto |tf(t)|$ est paire.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|tf(t)\right| \mathrm{d}t$ converge et que $t \mapsto |tf(t)|$ est paire, on peut conclure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|tf(t)\right| \mathrm{d}t$ converge. Donc X admet une espérance.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge et $t \mapsto tf(t)$ est impaire.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 0$, c'est-à-dire $E(X) = 0$.

4)c)X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance, c'est-à-dire si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|t^2 f(t)\right| \mathrm{d}t$ converge.

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|t^2 f(t)\right| \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann divergente.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|t^2 f(t)\right| \mathrm{d}t$ diverge, ce qui prouve que X n'admet pas de variance.

5)a)Pour tout x réel, on a : $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x)$.

• $x < 0$:
La variable aléatoire $|X|$ ne prend que des valeurs positives. L'événement $(|X| \leq x)$ est alors impossible. Donc $F_Y(x) = 0$.

• $x \geq 0$:
$F_Y(x) = P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x)$.
Deux sous-cas apparaissent :

$0 \leq x < 1$ (ou $-1 < -x \leq 0$) : $F_Y(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$.

$x \geq 1$ (ou $-x \leq -1$) : $F_Y(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2x^2}\right) - \dfrac{1}{2(-x)^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

On a finalement : $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & si \quad x \geq 1. \end{cases}$

F_Y est continue sur $]-\infty, 1[$ (fonction nulle) et sur $[1, +\infty[$ coïncidant sur cet intervalle avec la différence et l'inverse de fonctions continues.
Elle est également continue en 1 car $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^+} F(x) = F(1) = 0$.

Donc F est continue sur $\mathbf{R}$.

De plus, F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 1 (fonction nulle ou différence et inverse de fonctions C^1).

Donc Y est une variable aléatoire à densité.

5)b)Une densité f_Y de Y s'obtient en dérivant F_Y aux points où elle est dérivable (donc pour tout $x \neq 1$) et en prenant une valeur arbitraire positive ou nulle (par exemple 2) pour $x = 1$.

On obtient alors : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1, \\ \dfrac{2}{x^3} & si \quad x \leq 1. \end{cases}$

5)c)Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|tf_Y(t)\right| \mathrm{d}t$ converge.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \left|tf_Y(t)\right| \mathrm{d}t$ converge et vaut zéro puisque f_Y est nulle sur $]-\infty, 1]$.

$\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \left|tf_Y(t)\right| \mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \left|t \times \frac{2}{t^3}\right| \mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{2}{t^2} \mathrm{d}t$ converge car elle a même nature que l'intégrale de Riemann convergente $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$.

Par Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|tf(t)\right| \mathrm{d}t$ converge.

Donc Y admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf_Y(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{1} tf_Y(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} tf_Y(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{1} 0\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} \frac{2}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= 0 + \lim_{A \to +\infty} \int_{1}^{A} \frac{2}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{-2}{t}\right]_1^A \\
&= \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{-2}{A} + 2\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Partie B

1)a)On sait que $D(\Omega) = \{-1, 1\}$.
Si $D = -1$, alors $Z = 0$. Si $D = 1$, alors $Z = 1$. Donc $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Z suit donc une loi de Bernoulli. Son paramètre est :
$P(Z = 1) = P\left(\dfrac{D+1}{2} = 1\right) = P(D + 1 = 2) = P(D = 1) = \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$.
On a $D = 2Z - 1$, ce qui donne par linéarité de l'espérance :
$E(D) = 2E(Z) - 1 = 2 \times \dfrac{1}{2} - 1 = 0$.
Puis, $V(D) = V(2Z - 1) = 2^2 V(Z) = 4 \times \dfrac{1}{4} = 1$.

1)b)Comme D et Y sont indépendantes, DY admet une espérance donnée par : $E(DY) = E(D)E(Y) = 0$. Ainsi, $E(T) = 0$.

1)c)La formule des probabilités totales pour le sce $(D = -1), (D = 1)$ s'écrit pour tout x réel :
$P(T \leq x)$
$= P(T \leq x \cap D = 1) + P(T \leq x \cap D = -1)$
$= P(DY \leq x \cap D = 1) + P(DY \leq x \cap D = -1)$
$= P(Y \leq x \cap D = 1) + P(-Y \leq x \cap D = -1)$
$= P(Y \leq x \cap D = 1) + P(Y \geq -x \cap D = -1)$
$= P(Y \leq x)P(D = 1) + P(Y \geq -x)P(D = -1)$ par indépendance de D et Y
$= \dfrac{1}{2}P(Y \leq x) + \dfrac{1}{2}P(Y \geq -x)$.

1)d)De l'égalité ci-dessus, on déduit :
$P(T \leq x) = \dfrac{1}{2}P(Y \leq x) + \dfrac{1}{2}\big(1 - P(Y < -x)\big)$, c'est-à-dire :
$F_T(x) = \dfrac{1}{2}\big(P(Y \leq x) + 1 - P(Y < -x)\big)$.
Y étant à densité, on a : $P(Y < -x) = P(Y \leq -x) = F_Y(-x)$.
On a donc $F_T(x) = \dfrac{1}{2}\big(F_Y(x) + 1 - F_Y(-x)\big) \quad (*)$

On sait d'après A)5)a) que $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & si \quad x \geq 1. \end{cases}$

On a donc $F_Y(-x) = \begin{cases} 0 & si \quad -x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{(-x)^2} & si \quad -x \geq 1. \end{cases}$

C'est-à-dire : $F_Y(-x) = \begin{cases} 0 & si \quad x > -1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & si \quad x \leq -1. \end{cases}$

Calculons enfin $F_T(x)$ en repartant de $(*)$ et en distinguant plusieurs cas :
• $x \leq -1$
$F_T(x) = \dfrac{1}{2}\left(0 + 1 - \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\right) = \dfrac{1}{2x^2}$.
• $-1 < x < 1$
$F_T(x) = \dfrac{1}{2}\big(0 + 1 - 0\big) = \dfrac{1}{2}$.
• $x \geq 1$
$F_T(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{x^2} + 1 - 0\right) = 1 - \dfrac{1}{2x^2}$.
On remarque que $\forall x \in \mathbf{R}, F_T(x) = F_X(x)$. Donc T a même loi que X.

2)a)Le cours donne $F_U(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0, \\ x & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si \quad x > 1. \end{cases}$

2)b)Pour tout x réel, on a : $F_V(x) = P(V \leq x) = P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right)$.

Distinguons deux cas :
• $x \leq 0$
La variable aléatoire $\dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$ ne prend que des valeurs strictement positives. Donc l'événement $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right)$ est impossible. Donc $F_V(x) = 0$.
• $x > 0$
$F_V(x) = P\left(\sqrt{1-U} \geq \dfrac{1}{x}\right) = P\left(1 - U \geq \dfrac{1}{x^2}\right) = P\left(U \leq 1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$
$= F_U\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$.
Or, $1 - \dfrac{1}{x^2} < 0 \iff \dfrac{1}{x^2} > 1 \iff x^2 < 1 \iff 0 < x < 1$.
Donc si $0 < x < 1$, alors $F_V(x) = 0$.
Enfin, $0 \leq 1 - \dfrac{1}{x^2} \leq 1 \iff 0 \leq \dfrac{1}{x^2} \leq 1 \iff x^2 \geq 1 \iff x \geq 1$.
Donc si $x \geq 1$, alors $F_V(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.

Finalement, $F_V(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & si \quad x \geq 1. \end{cases}$

On constate que $\forall x \in \mathbf{R}, F_V(x) = F_Y(x)$, ce qui prouve que V et Y ont même loi.

3)a)On sait que $D = 2Z - 1$ où $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$.

D'où le programme :

```
from numpy.random import binomial
def D(n):
    y=[2*binomial(1,0.5)-1 for k in range(n)]
    return y
```

3)b)Les coefficients de la liste c sont n simulations de la variable aléatoire DV donc de DY (car V et Y ont même loi), c'est-à-dire de T donc de X.

sum(c)/n est la moyenne des n simulations de la loi de X.
Quand n est assez grand, elle s'approche de $E(X) = 0$.