Correction DM10 cubes

Exercice 1 (eml 2006 maths appro

1)a) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^n e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}$

$$= \lim_{u\to+\infty} \left(u^{1/2}\right)^{n+2} e^{-u} \quad \text{en posant } u = t^2 \text{ ou } t = u^{1/2}$$
$$= \lim_{u\to+\infty} \frac{u^{\frac{n+2}{2}}}{e^u}$$
$$= 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Donc $t^n e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

1)b) $t^n e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge.

D'après le critère de négligeabilité pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt$ converge.

De plus, $\displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t^2}dt$ converge car $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $[0,1]$.

D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt$ converge.

Enfin, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est paire ou impaire. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt$ converge.

2)a)• Soit $A > 0$. Effectuons une IPP sur $\displaystyle\int_0^A t^{n+2}e^{-t^2}dt$ en posant :

$u(t) = t^{n+1}$ $\qquad v'(t) = te^{-t^2}$

$u'(t) = (n+1)t^n$ $\qquad v(t) = -\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$.

u et v sont de classe C^1 sur $[0,A]$. L'IPP est licite et donne :

$$\int_0^A t^{n+2}e^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2}t^{n+1}e^{-t^2}\right]_0^A - \int_0^A -\frac{1}{2}(n+1)t^n e^{-t^2}dt$$
$$= -\frac{1}{2}A^{n+1}e^{-A^2} + \frac{n+1}{2}\int_0^A t^n e^{-t^2}dt \quad (*)$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} -\dfrac{1}{2}A^{n+1}e^{-A^2} = 0$ par le même argument qu'en 1)a).

En passant à la limite dans $(*)$ quand $A \to +\infty$, on a :

$$\int_0^{+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}dt = \frac{n+1}{2}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt \quad (1).$$

• La même IPP sur $\displaystyle\int_B^0 t^{n+2}e^{-t^2}dt$ donne (avec $B < 0$) :

$$\int_B^0 t^{n+2}e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}B^{n+1}e^{-B^2} + \frac{n+1}{2}\int_B^0 t^n e^{-t^2}dt \quad (**)$$

$$\lim_{B\to-\infty}\frac{1}{2}B^{n+1}e^{-B^2} = \lim_{C\to+\infty}\frac{1}{2}(-C)^{n+1}e^{-C^2} \quad \text{en posant} C=-B$$
$$= \lim_{C\to+\infty}\frac{1}{2}(-1)^{n+1}C^{n+1}e^{-C^2}$$
$$= 0 \quad \text{en posant } x = C^2.$$

En passant à la limite dans $(**)$ quand $B \to -\infty$, on a :

$$\int_{-\infty}^{0} t^{n+2}e^{-t^2}dt = \frac{n+1}{2}\int_{-\infty}^{0} t^n e^{-t^2}dt \quad (2).$$

En ajoutant (1) et (2), on a grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}dt = \frac{n+1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt, \text{ c'est-à-dire } I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n.$$

2)b)Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a : $I_{2p+1} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1}e^{-t^2}dt.$

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{2p+1}e^{-t^2}dt$ et $t \mapsto t^{2p+1}e^{-t^2}$ est impaire. Donc $I_{2p+1} = 0$.

2)c)Soit $\mathscr{P}(p)$ la proposition : « $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$ ».

$\mathscr{P}(0)$ s'écrit : « $I_0 = \sqrt{\pi}$ ».

$$\begin{aligned}
\text{Or, } I_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u/\sqrt{2})^2}\frac{1}{\sqrt{2}}du \quad \text{en posant } t = u/\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du \\
&= \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}du \\
&= \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)du \quad \text{où } \varphi \text{ est la densité de } \mathscr{N}(0,1) \\
&= \sqrt{\pi}\times 1 \\
&= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $p \in \mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2}I_{2p} \\
&= \frac{2p+1}{2}\times\frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} \quad \text{par HR} \\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{(2p+2)2^{2p+1}p!}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2p+2)!}{2(p+1)2^{2p+1}p!}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}\sqrt{\pi} \quad \text{donc } \mathscr{P}(p+1) \text{ est vraie.}
\end{aligned}$$

Exercice 2 (2002 maths appro)

• premier cas : $U = 1$
On a alors $X \leq n$.
Sur les n unités du stock, X sont vendues et $n - X$ sont non vendues.
Chaque unité vendue rapportant x euros, les X unités vendues rapportent xX euros.
Chaque unité non vendue causant une perte de y euros, les $n - X$ unités non vendues engendrent une perte de $(n - X)y$ euros.
Le bénéfice (algébrique) du commerçant vaut donc $xX - (n - X)y$ euros.
Donc $Y_n = xX - (n - X)y$.
Comme $U = 1$, on a $1 - U = 0$, d'où $Y_n = \big(xX - (n - X)y\big)U + nx(1 - U)$.

• deuxième cas : $U = 0$
On a alors $X > n$.
Cela signifie que le nombre d'unités commandées au commerçant est supérieur à la taille du stock.
Le commerçant va donc vendre tout son stock de n unités, ce qui va lui rapporter nx euros.
Donc $Y_n = nx$.
Comme $U = 0$, on a $1 - U = 1$, d'où $Y_n = \big(xX - (n - X)y\big)U + nx(1 - U)$.

Dans tous les cas, on a : $Y_n = \big(xX - (n - X)y\big)U + nx(1 - U)$.

2)a)• premier cas : $U = 1$
On a alors $X \leq n$ donc $XU = X \leq n$.
On a aussi $XU \geq 0$ puisque $X \geq 0$.
Donc $0 \leq XU \leq n$. Mais XU est un entier donc $XU \in [\![0, n]\!]$.

• deuxième cas : $U = 0$
On a alors $X > n$, mais surtout $XU = 0$ donc $XU \in [\![0, n]\!]$.

On a bien dans tous les cas $(XU)(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.

2)b)Comme $(XU)(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$, la variable aléatoire XU est discrète finie.
Elle admet donc une espérance donnée par :

$$E(XU) = \sum_{k=0}^{n} kP(XU = k) = \sum_{k=1}^{n} kP(XU = k).$$

Or, $\forall k \in [\![1, n]\!],\ XU = k \iff X = k \text{ et } U = 1 \iff X = k \text{ et } X \leq n \iff X = k$.

Donc $E(XU) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X = k)$.

2)c)La question 1) donne :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= E\left[\big(xX - (n - X)y\big)U + nx(1 - U)\right] \\ &= E\left[xXU - nyU + yXU + nx - nxU\right] \\ &= E\left[(x + y)XU - n(x + y)U + nx\right] \\ &= nx + (x + y)E(XU) - n(x + y)E(U) \quad (*) \end{aligned}$$

Comme U suit une loi de Bernoulli, on a : $E(U) = P(U = 1)$,

avec $P(U = 1) = P(X \leq n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k)$.

Donc $E(U) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$.

D'autre part, $E(XU) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k)$.

En substituant ces sommes dans $(*)$, on obtient :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= nx + (x+y)\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) - n(x+y)\sum_{k=0}^{n} P(X = k) \\ &= nx + (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) - n\sum_{k=0}^{n} P(X = k)\right) \\ &= nx + (x+y)\sum_{k=0}^{n} (k-n)P(X = k). \end{aligned}$$

3)a)On déduit :

$E(Y_{n+1}) - E(Y_n)$

$$= \left((n+1)x + (x+y)\sum_{k=0}^{n+1} (k-n-1)P(X = k)\right) - \left(nx + (x+y)\sum_{k=0}^{n} (k-n)P(X = k)\right)$$

$$= x + (x+y)\sum_{k=0}^{n} (k-n-1)P(X = k) - (x+y)\sum_{k=0}^{n} (k-n)P(X = k)$$

$$= x + (x+y)\sum_{k=0}^{n} \big((k-n-1)P(X = k) - (k-n)P(X = k)\big)$$

$$= x - (x+y)\sum_{k=0}^{n} P(X = k).$$

3)b)Posons $u_n = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$.

$\forall k \in \mathbf{N},\ P(X = k) > 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in_d n}$ est strictement croissante.

Par ailleurs, $u_0 = P(X = 0) < \dfrac{x}{x+y}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

Soit $E = \left\{ n \in \mathbf{N} \mid u_n < \dfrac{x}{x+y} \right\}$ et notons n_0 le plus grand élément de E.

On a alors : $u_{n_0} < \dfrac{x}{x+y}$ et $u_{n_0+1} \geq \dfrac{x}{x+y}$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{n_0} P(X = k) < \frac{x}{x+y} \text{ et } \sum_{k=0}^{n_0+1} P(X = k) \geq \frac{x}{x+y}.$$

3)c)Avec les questions 3)a) et 3)b), on voit que $E(Y_{n+1}) - E(Y_n) > 0 \iff n \leq n_0$.

On a donc : $E(Y_0) < E(Y_1) < \cdots < E(Y_{n_0}) < E(Y_{n_0+1}) \geq E(Y_{n_0+2}) \geq \cdots$

Ainsi, $E(Y_n)$ est maximale pour $n = n_0 + 1$.