Correction DM11 cubes

Exercice 1 :

1)f est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 données par :

$\partial_1 f(x,y) = x + 2y + 2xy^2$ et $\partial_2 f(x,y) = 2x + y + 2x^2 y$.

2)Les points critiques de f sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 2xy^2 & = 0 \\ 2x + y + 2x^2 y & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2y}{1+2y^2} \\ \dfrac{-4y}{1+2y^2} + y + \dfrac{8y^3}{(1+2y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2y}{1+2y^2} \\ \\ \dfrac{-4y(1+2y^2) + y(1+2y^2)^2 + 8y^3}{(1+2y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2y}{1+2y^2} \\ \\ y(4y^4 + 4y^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

En posant $Y = y^2$, l'équation $4y^4 + 4y^2 - 3 = 0$ se ramène à $4Y^2 + 4Y - 3 = 0$ de solutions $Y = -3/2$ ou $Y = 1/2$.

Le système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2y}{1+2y^2} \\ \\ y = 0 \text{ ou } y^2 = -3/2 \text{ ou } y^2 = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2y}{1+2y^2} \\ \\ y = 0 \text{ ou } y = \sqrt{1/2} \text{ ou } y = -\sqrt{1/2} \end{cases}$$

Les points critiques de f sont donc $(0,0)$, $\left(-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}\right)$ et $\left(\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2}\right)$.

3)f est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 données par :

$\partial_{1,1} f(x,y) = 1 + 2y^2$, $\partial_{1,2} f(x,y) = \partial_{2,1} f(x,y) = 2 + 4xy$ et $\partial_{2,2} f(x,y) = 1 + 2x^2$.

La matrice hessienne de f en (x,y) est donc $\begin{pmatrix} 1+2y^2 & 2+4xy \\ 2+4xy & 1+2x^2 \end{pmatrix}$.

4)Les seuls points où f est susceptible de présenter un extrémum local sont les points critiques.

• La matrice hessienne de f en $(0,0)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Ses valeurs propres sont -1 et 3. Elles sont de signes contraires donc f n'a pas d'extrémum local en $(0,0)$ (c'est un point selle).

• La matrice hessienne de f en $\left(-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}\right)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Ses valeurs propres sont 2 et 2 (elles sont confondues). Elles sont strictement positives donc f possède un minimum local en $\left(-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}\right)$.
De plus, $f\left(-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}\right) = 1/2$.

• La matrice hessienne de f en $\left(\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2}\right)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
f possède un minimum local en $\left(\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2}\right)$.
De plus, $f\left(\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2}\right) = 1/2$.

5)$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2$

$$= \left(\frac{1}{2} + y^2\right)x^2 + 2yx + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}.$$

6)En considérant l'expression précédente comme un trinôme du second degré en x, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (2y)^2 - 4\left(\frac{1}{2} + y^2\right)\left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}\right) \\
&= 4y^2 - 2\left(y^2 + \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= -2y^4 + 2y^2 - \frac{1}{2} \\
&= -2\left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Le trinôme a donc un signe constant, celui de $\frac{1}{2} + y^2$, il est donc positif.

On a donc $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \left(\dfrac{1}{2} + y^2\right)x^2 + 2yx + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{4} \geq 0$, c'est-à-dire :

$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) \geq \dfrac{1}{2} = f\left(\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2}\right)$.
Cela entraîne que f admet en $\left(\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2}\right)$ un minimum global sur $\mathbf{R}^2$.
Même raisonnement en $\left(-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}\right)$.

Exercice 2 (ecricome 2018 - maths appro)

1)a)Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $P(X=k)=\dfrac{b^k}{k!}P(X=0)$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Soit $k\in\mathbf{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}P(X=k) &= \frac{b}{k+1}P(X=k) \text{ car } X \text{ vérifie une rel. de Panjer}\\ &= \frac{b}{k+1}\times\frac{b^k}{k!}P(X=0) \text{ par HR}\\ &= \frac{b^{k+1}}{(k+1)!}P(X=0).\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k\in\mathbf{N},\ P(X=k)=\dfrac{b^k}{k!}P(X=0)$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)=1$ car la famille d'événements $(X=k)_{k\in\mathbf{N}}$ est un système complet.

b)On déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b^k}{k!}P(X=0)=1$, puis $\displaystyle P(X=0)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b^k}{k!}=1$.

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b^k}{k!}=e^b$, d'où $P(X=0)=e^{-b}$.

On a donc $\forall k\in\mathbf{N},\ P(X=k)=e^{-b}\dfrac{b^k}{k!}$, ce qui prouve que $X\hookrightarrow\mathscr{P}(b)$.

$E(X)=b$ et $V(X)=b$.

2)a)Soit $\mathscr{P}(k)$ la proposition : « $P(X=k)=0$ », $(k\geq 2)$

$P(X=2)=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)P(X=1)=0$ car $b=-2a$. Donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

Soit $k\geq 2$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}P(X=k+1) &= \left(a+\frac{b}{k+1}\right)P(X=k)\\ &= \left(a+\frac{b}{k+1}\right)\times 0 \text{ par HR}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

On conclut que $\forall k\geq 2,\ P(X=k)=0$.

b)Comme $X(\Omega)\subset\mathbf{N}$ et que $\forall k\geq 2,\ P(X=k)=0$, on a $X(\Omega)=\{0,1\}$.
Donc X suit une loi de Bernoulli. Son paramètre est :

$P(X=1)=(a+b)P(X=0)=-aP(X=0)$.

Or, $P(X=0)+P(X=1)=1$ donc $P(X=0)-aP(X=0)=1$.

D'où $P(X=0)=\dfrac{1}{1-a}$, puis $P(X=1)=\dfrac{a}{1-a}$.

Ainsi, $X\hookrightarrow\mathscr{B}\left(\dfrac{a}{a-1}\right)$.

3)a)$Z\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$ donc $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!],\ P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Donc $\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ P(X = k-1) = \binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}$.

On déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} P(Z = k-1) &= \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} \\
&= \frac{n-k+1}{k} \times \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= P(Z = k).
\end{aligned}$$

b) $\dfrac{p}{1-p} \times \dfrac{n-k+1}{k} = \dfrac{p}{1-p} \times \left(\dfrac{n+1}{k} - 1\right) = \dfrac{-p}{1-p} + \dfrac{\frac{p(n+1)}{1-p}}{k}$.

La question précédente donne alors :

$\forall k \in [\![1, n]\!], P(Z = k) = \left(a + \dfrac{b}{k}\right) P(Z = k-1)$ avec $a = \dfrac{-p}{1-p}$ et $b = \dfrac{\frac{p(n+1)}{1-p}}{k}$.

Cette égalité est encore vraie pour $k = n+1$ et même pour tout $k > n+1$.

Donc Z suit une relation de Panjer.

4)a)$P(X = 1) = (a+b)P(X = 0)$.

Comme $P(X = 1) \geq 0$ et que $P(X = 0) \geq 0$, on a alors $a + b \geq 0$.

b)Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} kP(X = k) &= \sum_{k=1}^{m+1} k\left(a + \frac{b}{k}\right) P(X = k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} (ak + b) P(X = k-1) \\
&= a\sum_{k=1}^{m+1} kP(X = k-1) + b\sum_{k=1}^{m+1} P(X = k-1) \\
&= a\sum_{j=0}^{m} (j+1)P(X = j) + b\sum_{j=0}^{m} P(X = j) \text{ en posant} j = k-1 \\
&= a\sum_{k=0}^{m} (k+1)P(X = k) + b\sum_{k=0}^{m} P(X = k).
\end{aligned}$$

c)Pour tout entier $m \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{m+1} kP(X = k) = a\sum_{k=0}^{m} kP(X = k) + (a+b)\sum_{k=0}^{m} P(X = k)$$

$$\sum_{k=1}^{m} kP(X = k) + (m+1)P(X = m+1) = a\sum_{k=0}^{m} kP(X = k) + (a+b)\sum_{k=0}^{m} P(X = k)$$

$$(1-a)\sum_{k=1}^{m} kP(X = k) = -(m+1)P(X = m+1) + (a+b)\sum_{k=0}^{m} P(X = k) \quad (*)$$

d)La suite $\left(\sum_{k=0}^{m} kP(X=k)\right)_{m\geq 1}$ est croissante comme somme de termes positifs.

De plus $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) = 1$.

Donc $\forall m \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) \leq 1$, puis $(a+b)\sum_{k=0}^{n} P(X=k) \leq a+b$ (car $a+b \geq 0$).

De plus, $-(m+1)P(X=m+1) \leq 0$.

De $(*)$, on tire : $(1-a)\sum_{k=1}^{m} kP(X=k) \leq a+b$, puis $\sum_{k=1}^{m} kP(X=k) \leq \frac{a+b}{1-a}$.

La suite $\left(\sum_{k=1}^{m} kP(X=k)\right)_{m\geq 1}$ est donc majorée.

Etant par ailleurs croissante, elle est donc convergente, ce qui entraîne que la série $\sum_{k\geq 1} kP(X=k)$ est absolument convergente. Donc X admet une espérance.

En faisant tendre m vers $+\infty$ dans $(*)$, on a :

$$(1-a)\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \lim_{m\to+\infty} -(m+1)P(X=m+1) + (a+b)\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)$$

Comme la série $\sum_{k\geq 1} kP(X=k)$ converge, son terme général converge vers zéro.

Donc $\lim_{m\to+\infty} -(m+1)P(X=m+1) = 0$.

On obtient finalement : $(1-a)\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = (a+b)\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)$, c'est-à-dire :

$(1-a)E(X) = (a+b) \times 1$.

Donc $E(X) = \frac{a+b}{1-a}$.